生命保険の新たな価格付け理論とリスク管理

（死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付け）

課程博士（経済学）
学位取得論文

小島　茂

千葉大学
社会文化科学研究科

【謝辞】

本博士論文を執筆するにあたり、大鋸崇先生（主査）、松田忠三先生（副査）、野村芳正先生（副査）から多くの有益な助言を頂いた。加えて、慶応義塾大学・政策 COE 主催「保険・年金リスク研究報告会」以来，慶応義塾大学の森平爽一郎先生（現，早稲田大学大学院）と小暮厚之先生から本研究に対する有益なコメントを頂いた．ここに，感謝の意を表したい．

その中でも、大鋸崇先生には、私が千葉大学社会文化科学研究科に入学して以来、指導教官をお引き受けいただき、特に深く感謝の意を表したい。

また、本博士論文におけるすべての過ちは、筆者である小島茂に帰属するものである。

課程博士学位取得論文

生命保険の新たな価格付け理論とリスク管理

（死亡リスクの証券化と死亡リスク･スワップ取引の価格付け）

小島　茂
千葉大学
社会文化科学研究科

論文の構成

保険と金融の融合が生命保険分野で始まった．スイス再保険会社（以下，Swiss　Re と呼ぶ）は，世界初，資本市場向けに死亡リスクの証券化を 2003 年 12 月に実施したのである．生命保険会社のリスク管理意識の向上により，生命保険と金融との融合商品の取引ニーズが今後，高まってくることが予想される．

生命保険会社（含む，生命再保険会社）は，ストップロス再保険が内包されている死亡リスク債券を発行する証券化により，リスク移転を図ることができる．従来のストップロス再保険の保険料は，保険数理理論に基づき決定されている．しかし，死亡リスク債券が資本市場で売買されることで，このストップロス再保険が，あらたに資本市場で評価されることになる．つまり，この生命保険と金融の融合商品の価格付けは，伝統的な保険数理理論と金融工学理論，双方により行われるべきである．そこで，本論文では，この生命保険と金融の融合商品である死亡リスクの証券化とそれに派生するリスク・スワップ取引の価格付けを非完備市場を前提に考察する．なお，日本において，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付けに関する研究を査読誌に掲載したのは，小島[2005]，小島[2007]が最初である．

第 1 章　序論

本章は，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付けを研究するため，最初に論文の基礎となる金融と生命保険の融合商品の価格付けの基本概念を整理する．保険数理理論の中心的役割である保険料計算原理，金融工学の基礎を成す無裁定価格理論，

さらに，保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究を紹介し，最後に本研究のベースとなる保険料計算原理と金融工学双方を結び付ける Gerber and Shui[1994]の非完備市場における価格付けモデルについて，概説する．

第 2 章　生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け

本章は，生命保険会社の死亡リスクを資本市場に移転させる証券化とその証券化商品である死亡リスク債券の価格付けについて取り扱ったものである．Swiss Re が実施した死亡リスクの証券化を参考に，証券化モデルおよび死亡リスクの原因となる死亡数の確率過程モデルを定式化し，その確率過程とオプション理論を用いて，死亡リスク債券に内包するストップロス再保険について，非完備市場での理論価格モデルを提案した．

第 3 章　生命保険会社における生存リスクの証券化と共単調性の理論に基づくその価格付け

本章は，生命保険会社の生存リスクを資本市場に移転させる証券化とその証券化商品である生存リスク債券の価格付けについて取り扱ったものである． 2004 年 11 月に欧州投資銀行（以下，EIB と呼ぶ）が，生存リスクの証券化を実施した．生存リスクに関する証券化の価格付けは，公表されていない．そこで，本章は，生命年金保険に内包する生存リスクの証券化を分析し，共単調の理論に基づき生存リスク債券の理論価格モデルを提案した．

第 4 章　生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル

本章は，死亡率が確率過程に従うとして，死亡リスクと生存リスクを生命保険会社間で交換する死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデルを提案するものである．具体的には，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社との間で，相互に損失を補填し合う取引モデルを提案する．また，それぞれの支払額を非完備市場におけるコールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，2 つのオプションプレミアムが等価となる契約条件をどのように設定するかを示す．

第 5 章　今後の課題

本論文は，生命保険会社のリスク管理の充実に備え，死亡リスクの外部移転手段となる死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引に関する価格付けモデルを提案し，実証研究を行ったものである．本章では，以上の研究についての今後の課題について述べる．

目次

第1章　序論[1]

本章は，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付けを研究するため，最初に論文の基礎となる金融と生命保険の融合商品の価格付けの基本概念を整理する．保険数理理論の中心的役割である保険料計算原理，金融工学の基礎を成す無裁定価格理論，さらに，保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究を紹介し，最後に本研究のベースとなる保険料計算原理と金融工学双方を結び付けるGerber and Shui[1994]の非完備市場における価格付けモデルについて，概説する．

1.1　はじめに

生命保険と金融の融合が生命保険分野で始まった．死亡リスクの証券化であり，保険リスクを移転する商品として，生命保険と金融双方で関心が高まっている．

2008年からの日本版SOX法，2010年度からの国際会計基準等，生命保険会社を取り巻く環境は，急速に変化しており，このような環境のなかで，生命保険会社は，経営の健全性を高め，企業価値を高めていくために，さまざまなリスクを的確に認識・把握した上で，コントロールしていくことが不可欠である．そのなかで，証券化によるリスクの移転については，リスクコントロールの1つの手段であり，今後，重要な役割を担うことは間違いないであろう．

生命保険会社のコアとなるリスクは，死亡リスクであり，予定外の死亡率のぶれから生じる損失と見ることができる．生命保険にとって，このリスクを外部移転することは，重要なリスクコントロール手法である．しかし，リスクを外部に移転する方法は，長期間にわたり，再保険に限定されてきていた．今後のリスク管理の充実を図るにあたっては，再保険市場ではリスクを受け入れるキャパシティーに限界がある．この問題を解決する市場は資本市場であり，もし，資本市場を死亡リスクの引き受け手となれば，キャパシティーが増大化することにより，あらたなリスク移転への道を切り開くことになる．

スイス再保険会社（以下，Swiss Reとよぶ）は，世界初，資本市場向けに死亡リスクの証券化を2000年に実施した．資本市場を活用したキャパシティーの拡大を画策したと言っていい．また，Swiss Re[2006]によれば，「今日までに発行された死亡リスク債券の合計額は，9億米ドルであるが，全世界市場の潜在規模（死亡により失われる所得）が5兆5,000 億米ドルからすれば，些少である．」と述べ，今後の死亡リスクの証券化の市場拡大を示唆している．Swiss Re 社が実施した証券化のスキームは，特別目的会社を媒体と

1　本論文は，小島茂[2005a],小島茂[2005b],小島茂[2007]の論文を加筆・修正したものである．小島茂[2007]は，基本的には同じ内容の論文である．

して行われた．特別目的会社は，生命再保険会社と死亡率が一定（境界値「エクセス・ポイント」）以上上昇した場合にペイオフが発生するストップロス再保険契約を締結する一方，投資家に対して死亡リスク債券を発行する．債券の満期までに，一定以上の死亡率が発生すれば，元利金の一定割合が没収されるというリスクを投資家が負う．対価として，無リスク金利による収益と生命再保険会社からの再保険料が利金として支払われる．発行する側としては，死亡率のぶれから生じる損失が補填されるので，最も望ましい形態である．一方，投資家は，無リスク資産より高い収益率が得られるばかりでなく，株式等の金融商品との相関がほとんどないと考えられることから，ポートフォリオの改善が図られる．また，死亡リスクの移転先である投資家は，固定収入を得る代わりに，不確実な支払義務を負うことになることから，資本市場において，生命保険会社と同様な役割を担う．従来の保険会社が評価していた死亡リスクのリスクマージンをこの証券化により，資本市場ではじめて評価することになる．

したがって，従来の保険数理理論と資本市場での金融工学との融合したストップロス再保険価格付けモデルが必要となった．このスキームは，生命再保険会社ばかりではなく，一般の生命保険会社においても応用可能である．

死亡リスクの証券化が進めば，次の段階として，ストップロス再保険の組み合わせで構成される死亡リスク・スワップ取引のニーズが高まる．債券発行コストが不要であることから，証券化よりはるかにコストが少ないリスク移転取引である．先行事例として，2000年に東京電力と東京ガスの間で実行した気温リスク・スワップ取引がある．夏場の気温上昇で収益が減少する東京ガスと気温低下で収益が減少する東京電力がストップロス再保険料が同額となるようにそれぞれの気温境界値を設定し，境界値を越えた場合にペイオフが発生する取引を実行した．これは，証券化という手法を用いず，コスト軽減効果を狙ったもので，死亡リスク・スワップ取引にそのまま応用可能である．したがって，死亡リスク・スワップ取引は，死亡リスクを保有する生命保険会社と正反対の生存リスクを保有する生命保険会社がそれぞれのリスクを交換するリスク移転の１つの手段であり，コスト軽減が図られる．

しかし，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引を実施するためには，内包するストップロス再保険の価格付けをどのように行うかが問題となる．従来のストップロス再保険の保険料は，保険数理理論に基づき決定している．しかし，死亡リスクの証券化では，ストップロス再保険を含む死亡リスク債券が資本市場で売買されることになる．つまり，このストップロス再保険は，いわゆる生命保険と金融の融合商品と言うことができ，その価格付けは，保険数理理論と金融工学双方により，行うことになる．しかし，その価格付けについては，標準的な手法が存在しない．

そこで，本論文は，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付けを考察することにした．

保険数理理論も金融工学も長い年月をかけて独自のリスク管理手段を育成し，扱うリス

クの性質からまったくと言っていいほど異なった歴史的背景を持っている．行政上の都合から必要以上に別物扱いされてきたともいえる．

保険数理理論は，生命保険商品について，アクチュアリーが保険数学のなかで，価格付けやリスク把握手法として発展してきた．とくに，保険会社が倒産する確率に基づく集合的危険論は，昨今の保険数理理論において重要な役割を果たしている．一方，金融工学理論は，資本市場におけるオプション価格理論の登場以来，高度な数学が駆使され，学術分野として確立するまでに飛躍的発展を遂げている．このように，両者の価格理論へのアプローチには大きな乖離がある．その結果，理論の融合に向けて，接近しようという動きがほとんど見られなかった．比較的最近になるまで，保険数理の世界で金融工学理論を適用した研究は限定していたし，金融の世界では保険数理の応用はほとんど見受けられなかった．それが，死亡リスクの証券化により生命保険分野において，一挙にそのギャップを埋めつつある．つまり，従来からの保険数理理論に基き価格付けした死亡リスクマージンを含んだストップロス再保険を資本市場が金融工学理論をも用いて，合理的に評価することになる．

そこで，本章では，死亡リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引の価格付けの基礎を成す保険料計算原理，無裁定価格理論，さらに，保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究を紹介し，最後に本研究のベースとなる保険料計算原理と金融工学双方を結び付けるGerber and Shui[1994]の非完備市場におけるリスク調整済確率測度変換による価格付けモデルについて，概説する．

この章の構成は，第2節で，保険料計算原理を，第3節で，無裁定価格理論，第4節で，保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究，第 5 節では，Gerber and Shui[1994]の保険料計算原理と金融工学を結び付ける価格付けモデル，最後に第6節のこの章の結論とする．

1.2 保険数理理論

現在の生命保険料は，将来の保険事故による支払保険金額が所与として計算されている．その理論的根拠を与えるのもが大数の法則であったが，その妥当性や限界が問われることなく，この法則が公理のごとく扱われていた．本論文は，将来の保険事故による支払保険金額が不確実であることによるリスクの評価を目的とするために，この大数の法則の仮定をはずして，議論を進める．まず，伝統的な保険数理理論の中の集団的危険論について説明する．

1.2.1 集合的危険論

集団的危険論は，将来の保険金支払額が極めて不確実として，時間の経過とともに生じる将来の保険金支払額がその保険契約集団の収支変動等にどのように影響を与えるかについて考察するものである．分析対象は，保険会社が破産する確率と破産を回避するための保険料水準である．具体的に，単期間（時点ｔ＝０から時点ｔ＝１まで）の破産モデルで示すこととする．

保険会社がサープラス過程 U_t^I に従うとし， U_t^I が負になる確率を考察する．サープラス過程 U_t^I は，次のルベックモデルに従うとし，期首サープラスを正の定数 U_0^I とする．保険金支払総額過程を $\{S_t\}$，この期待値を $\mu^I t$ とする．

収入保険料を

$$P_t^k = (1+\varphi)\mu^I t$$

とすると，サープラス過程 U_t^I は,

$$U_t^I = U_0^I + (1+\varphi)\mu^I t - S_t^k$$

と表せる．ここに， φ は安全付加保険料率（正値）． $\varphi\mu t$ が安全付加保険料となる．このとき，単期間モデルの時点ｔ＝１における破産確率 ε^I は,

$$\varepsilon^I = \Pr(U_1^I < 0) = \Pr(U_0^I + (1+\varphi)\mu^I - S_1^k < 0)$$

である．これは， U_0^I が大きいほど，また，安全付加保険料が大きいほど破産確率が小さいことを示している．集合的危険論については，アクチュアリー会損保数理[2000]を参照されたい.

1.2.2 保険料計算原理

次に，集団的危険論の考察から，破産しないようにする適切な安全付加保険料はどのように決めればいいのか．これを考察したのが，保険料計算原理である．保険数理では，将来発生するリスクを保証する適正な保険料を確率空間 (Ω, F, P) 上の写像 $P:\Omega \mapsto R$ として捉えた．この写像（汎関数）を保険料計算原理と呼ぶ.

保険料計算原理を，1 年定期保険の価格付けモデルでわかりやすく示すと主に以下の４通りである．（詳細は， *Bühlmann*[1970]，David[2005]，Goovaerts et al[1984]，森本[2000]参照のこと）

①期待値原理 $$P^1 = \frac{(1+\gamma)E^P(X_1)}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

ここに，P^1 は，保険料，E^P は，実際の確率測度 P に基づく期待値を表す．また，X_1 は，翌期に支払う不確実な死亡保険金額とし，r は無リスク金利とする．

したがって，保険料は，実際の確率測度に基づく期待値に安全付加保険料を加算したものの割引現在価格である．また，安全付加保険料は，期待値に一定率を乗じたものである．

② 分散原理 $$P^1 = \frac{E^P(X_1) + aVaR(X_1)}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

安全付加保険料は，分散値に一定率を乗じたものである．分散原理については，Thomas[2001]参照のこと．

③ 標準偏差原理 $$P^1 = \frac{E^P(X_1) + b\sqrt{VaR(X_1)}}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

安全付加保険料は，標準偏差値に一定率を乗じたものである．

④ エッシャー原理 $$P^1 = \frac{1}{(1+r)} \frac{E^P(X_1 e^{\theta X_1})}{E^P(e^{\theta X_1})} \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

エッシャー原理では，不確実な死亡保険金支払額 X_1 に対する保険料を(1-2-4)により算出する．このとき，実確率測度 P のもとでの X_1 の確率密度関数を $f^P(X_1)$ とすると，確率測度 Q のもとでの X_1 の密度関数 $f^Q(X_1)$ は，

$$f^Q(X_1) = \frac{e^{\theta X_1}}{E^P[e^{\theta X_1}]} f^P(X_1)$$

となる．つまり，エッシャー原理は，ラドン・ニコディム微分を

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{e^{\theta X_1}}{E^P[e^{\theta X_1}]} \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

として，確率測度 P から確率測度 Q への確率測度変換と解釈できる．これが，エッシャー変換である．

さらに，$\theta > 0$ のとき，$e^{\theta X_1}$ は，X_1 の単調増加関数であるから，

$$E^Q[X_1] > E^P[X_1] \tag{1-2-6}$$

が成立する．すなわち，エッシャー原理で計算される保険料 P^1 は，純保険料 $E^P[X_1]/(1+r)$ より高くなる．さらに，エッシャー原理を変形すると，共分散の定義から，

$$P^1 = \frac{E^P[X_1]}{1+r} + \frac{Cov(X_1, e^{\theta X_1})}{(1+r)E^P[e^{\theta X_1}]}$$

と書ける．このとき，$\theta > 0$ であるから，

$$Cov(X_1, e^{\theta X_1}) > 0$$

より，エッシャー原理におけるリスクマージン $\hbar$ は，

$$\hbar = \frac{Cov(X_1, e^{\theta X_1})}{(1+r)E^P[e^{\theta X_1}]} > 0$$

で与えられる．

また，X_1 のモーメント母関数 $M_{X_1}(\theta) = E^P[e^{\theta X_1}]$ が存在するときに，

θ に関する微分と期待値演算が交換可能なので，

$$M'_{X_1}(\theta) = E[Xe^{\theta X_1}]$$

が成立する．したがって，エッシャー原理は，モーメント母関数を使えば，

$$P^1 = \frac{M'_{X_1}(\theta)}{M_{X_1}(\theta)} = (\log M_{X_1}(\theta))'$$

と表現される．つまり，エッシャー原理による保険料の計算は，X_1 のキュムラント母関数の１階の微分で与えられる．詳細は，Essher[1993],木島，田中[2007]を参照されたい．

また，*Bühlmann*[1980]は，経済・市場環境でリスクの価格付けは何らかの方法で，常に行こなわれているので，市場参加者のリスク選好の総和を反映させる合理的な経済モデルとしてエッシャー原理による保険料計算モデルを導いた．つまり，エッシャー原理の θ を絶対リスク回避度とし，$\dfrac{(e^{\theta X_1})}{E^P(e^{\theta X_1})}$ を用いることにより，実確率測度 P について，リスク回

避度を反映した確率測度へ変換することにより保険料計算モデルを導いたのである.

具体的には，投資家（n^B 人，$j=1,2,.....n^B$）は，リスク回避的な指数効用関数 $u_j(X_{1j}) = -e^{-\theta_j X_{1j}}$ を持つとする．また，初期富を Θ_j とし，リスクを X_{1j} とする．各投資家 j は，保険を購入することで，自由にリスクを交換できる．このリスク交換量を S_{1_j} とする．このために保険料 $\pi(S_{1j})$ を支払なければならない．無リスク金利を 0 として，期待効用最大化問題,

$$S_{1j} = \mathrm{argmax}_{S_1} E^P[u_j(\Theta_j - X_{1j} + S_{1j} - \pi(S_{1j}))]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n^B} S_{1j} = 0$$

から，均衡価格 $\pi(S_{1j})$ が求まる．この結果，均衡価格 $\pi(S_{1j})$ は,

$$\pi(S_1) = \frac{E^P[Ze^{\theta Z}]}{E^P[e^{\theta Z}]}$$

となる.

ここに，$\dfrac{1}{\theta} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n^B} \frac{1}{\theta_j}$，$Z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n^B} X_{1j}$

で与えられる.
したがって，リスク X_{1j} の均衡価格 $\pi(X_{1j})$ は,

$$\pi(X_{1j}) = \frac{E^P[X_{1j} e^{\theta(\sum_{k=1}^{n} X_{1k})}]}{E^P[\ e^{\theta(\sum_{k=1}^{n} X_{1k})}]}$$

で与えられる.
さらに，各リスク X_{1j} が微小であるとし，X_{1j} と $(Z - X_{1j})$ が独立であると仮定すると,

$$\pi(X_{1j}) = \frac{E^P\{X_{1j} e^{\theta X_{1j}}]}{E^P[e^{\theta X_{1j}}]}$$

となる．これは，まさしくエッシャー原理である．したがって，エッシャー原理の θ を，リスク回避的な指数効用関数 $u_j(X_{1j}) = -e^{-\theta_j X_{1j}}$ の絶対的リスク回避度として取り扱うことを *Bühlmann*［1980］が示した．

次に，1 年定期保険を 1 年ストップロス再保険に置き換えると，以下のとおりとなる．なお，ストップロス再保険は，元受保険会社の死亡保険金の支払額 X_1 が所定の金額 K を超えた場合に，超えた額を再保険金額として，再保険会社から受け取るものである．

①期待値原理 $$SP = \frac{(1+\gamma)E^P[\max(X_1 - K, 0)]}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

② 分散原理 $$SP = \frac{E^P[\max(X_1 - K, 0)] + aVaR(X_1)}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

ここに，K は，エクセス・ポイント（定数）である．

③ 標準偏差原理 $$SP = \frac{E^P[\max(X_1 - K, 0)] + b\sqrt{VaR(X_1)}}{(1+r)} \qquad (1\text{-}2\text{-}9)$$

④ エッシャー原理 $$SP = \frac{1}{(1+r)}E^P[\frac{e^{\theta X_1})}{E^P(e^{\theta X_1})}\max(X_1 - K, 0)] \qquad (1\text{-}2\text{-}10)$$

以上，保険数理理論は，集団的危険論の考察から，保険会社が破産しないようにする適切な安全付加保険料をいかに求めるかが基礎となっている．

引き続いて，金融工学の基礎をなす無裁定価格理論に基づくリスク資産のオプション価格付け理論を説明する．

1.3 金融工学における価格理論

リスク性金融資産の価格付けとは,「将来時点において発生する不確実なキャシュフローの現在価値を決定すること」としている．そこで，最初に価格付けにおいて重要な概念を定義しておく．

複数の金融商品が取引されている市場において，コスト 0 でリスクなしに利益をあげられる投資機会を裁定機会と呼ぶ．裁定機会のないように付けられた価格を無裁定価格と呼ぶ．裁定機会が存在しない場合の金融資産の価格は，公正価格である．そして，無裁定価

格は，ベンチマークとして利用することが出来る．

今後は，新しい金融派生商品がぞくぞくと開発することであろう．新商品であるため，その公正価格は資本市場の実際の取引から観察することが出来ないケースが多い．このような状況において，無裁定価格は，市場価格を推定するために非常に有効である．もし，実際に取引されている派生商品の価格が無裁定価格を上回っていれば，その派生商品は，割高となる．逆に無裁定価格を下回っていれば，その派生資産は，割安となる．無裁定価格は，ベンチマークを計算する主要なツールである．

以下では，金融商品が市場で取引でき，いつでも自由に取引ができるような完備市場（完全競争，完全情報，無摩擦の条件を満たす市場）を想定して議論を進めることにする．

まず，金融工学の無裁定価格理論について簡単なモデルを用いて紹介する．時点は，現在と次の時点しか存在しないと仮定，時間間隔を 1 年とする．

また，市場は次の 3 資産のみで構成されているとする．

① 無リスク資産とする短期国債を $B(t)$．収益率は，r である．

② 原資産を株式 $S(t)$．この資産は，1 年後に，2 つのみの市場の状態で 2 つの値しかとらないと仮定する．

③ 株式を原資産とする派生商品．価格（プレミアム）が $C(t)$，権利行使価格を K，次の時点で満期となるコールオプションとする．

3 つのポートフォリオを $\overline{S}_t$ とすると，

$$\overline{S}_t = \begin{bmatrix} B(t) \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} \tag{1-3-1}$$

ここで，t は，これらの価格が評価される現在時点で 0 とする．1 年後のペイオフは，行列を用いてまとめることが出来る．$S(0)$ は，リスク資産であり，上昇して $S_2(1)$ となるか，下落した場合は，$S_1(1)$ となる．最後に，コールオプションの市場価格 $C(0)$ も原資産価格 $S(0)$ の変化に伴って変動する．以上から，この特定のケースにおいて，D_1 は，次のように表現できる．

$$D_1 = \begin{bmatrix} (1+r)B(1) & (1+r)B(1) \\ S_1(1) & S_2(1) \\ C_1(1) & C_2(1) \end{bmatrix} \tag{1-3-2}$$

ここに，r は，無リスク金利とする．
ここでは，もっとも簡単な例を考える． $t=0, B(0)=1, S(0)=1{,}000$ とする．また，$r=5\%,\ S_1(1)=750, S_2(1)=2{,}000,$ コールオプションの権利行使価格 K を1,500とする．
　このコールオプションの現在価格 $C(0)$ を求める方法は，２つある．まず，コールオプションのペイオフを無リスク資産 $B(1)$ と株式 $S(1)$ で複製して求める方法.
0時点で,

$$C(0) = x + yS(0) \tag{1-3-3}$$

ここに，x は，無リスク資産量，y は，株式量.
1時点で，　状態１で，

$$C_1(1) = x(1+r) + yS_1(1) \tag{1-3-4}$$

状態２では,

$$C_2(1) = x(1+r) + yS_2(1) \tag{1-3-5}$$

この連立方程式を解くと $x=-285.7, y=0.4$．これにより，(1-3-3)式から，オプション価格 $C(0)$ は，114.3となる．これが，複製法である．この解釈は，0期で，銀行より無リスク金利で285.7を借り入れ，コールオプション売りのリスクプレミアム114.3を受け取ることにより，合計400を株式購入にあてる．時期1年後に状態1では，権利行使されず，株式売却で得た300を銀行返済300にあて，状態２では，株式売却で得た800を，権利行使されるための500と銀行返済300にあてる．このことは，オプション価格 $C(0)$ が，無裁定理論価格であることを示している．
　２つ目が，リスク中立評価法である．現在の株価は，公正価格であることを前提として，状態１と状態２の状態密度価格により，オプション価格 $C(0)$ を求める方法である．無リスク資産と株式の現時点と１年後の価格の関係を式で表すと，

$$1000 = 2000\psi_2 + 750\psi_1$$
$$1 = (1+r)\psi_2 + (1+r)\psi_1$$

となる．これを解くと，$\psi_1 = 0.7238, \psi_2 = 0.2288$ となる．これを状態価格密度という．さらに，割引率を無リスク金利とすると，あらたに Q_1, Q_2 を次式で定義する．

$$Q_1 = (1+r)\psi_1 = 0.76$$

$$Q_2 = (1+r)\psi_2 = 0.24$$

Q_1, Q_2 が確率であることを示す．
もし，$Q_2 < 0$ であれば，

$$S(0) = \frac{1}{1+r}\{S_2(1)Q_2 + S_1(1)Q_1\} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

から，

$$Q_2 = \frac{S(0)(1+r) - S_1(1)}{S_2(1) - S_1(1)}$$

となり，

$$S(0)(1+r) < S_1(1) < S_2(1)$$

となる．これは，裁定機会が存在することになるため，$Q_2 \geq 0$ でなければならないことを示した．Q_1 も同様である．次にもし，$Q_2 > 1$ であれば，

$$S(0)(1+r) - S_1(1) > S_2(1) - S_1(1)$$

から，

$$S(0)(1+r) > S_2(1) > S_1(1)$$

となり，やはり裁定機会が存在するので，$Q_2 \leq 1$ となる．Q_1 も同様である．以上より，$Q_1, Q_2 = (1-Q_1)$ は，$0 \leq Q_1, Q_2 \leq 1$ となるため，確率測度である．この裁定機会が存在しない条件のもとでの確率測度をリスク調整済確率測度と呼ぶ．
このリスク調整済確率測度を用いて，オプション価格 $C(0)$ を求めると，

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{1+r}\{\max(S_1(1)-K,0)Q_1 + \max(S_2(1)-K,0)Q_2\} \\ &= \frac{1}{1+r}E^Q[\max(S(1)-K,0)] = 114.3 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

となる．ここに，E^Q は，リスク調整済確率測度の下での期待値とする．コールオプショ

ンの価格は，リスク調整済確率測度の下での将来の不確実なペイオフの無リスク金利による割引期待現在価格として求められることを(1-3-7)式は，示した．この評価方法をリスク中立評価法と呼ぶ．この結果は，(1-3-3)式の複製法による価格と一致した．つまり，裁定機会が存在しない限り(1-3-7)式が成立し，リスク調整済確率測度（または，状態価格密度）が明示的に与えられれば，コールオプション等の派生商品の価格付けが可能となる．詳細は，Neftci[1996]，池田昌幸[2000]を参照されたい．

次に，実確率測度 P_1, P_2 を用いると何が起こるかを見て，リスク調整済確率測度 Q_1, Q_2 の意味を考えてみると，

$$\frac{1}{1+r}[P_1 S_1(1) + P_2 S_2(1)] = \frac{1}{1+r} E^P[S(1)] \tag{1-3-8}$$

$$\frac{1}{1+r}[P_1 C_1(1) + P_2 C_2(1)] = \frac{1}{1+r} E^P[C(1)] \tag{1-3-9}$$

となる．ここに E^P は実確率測度に基づく期待値をあらわす．一般に，将来のリスク性資産に係るペイオフの実確率測度の下での期待値を無リスク金利で割り引いた場合，

$$S(0) < \frac{1}{1+r} E^P[S(1)] \tag{1-3-10}$$

$$C(0) < \frac{1}{1+r} E^P[C(1)] \tag{1-3-11}$$

が成立する．なぜなら，もし，

$$S(0) = \frac{1}{1+r} E^P[S(1)] \tag{1-3-12}$$

$$C(0) = \frac{1}{1+r} E^P[C(1)] \tag{1-3-13}$$

が成立していたら，

$$1+r = \frac{E^P[S(1)]}{S(0)} \tag{1-3-14}$$

$$1+r = \frac{E^P[C(1)]}{C(0)} \tag{1-3-15}$$

となり，リスク資産に投資しても，無リスク資産のリターンしか得られないという矛盾が生じる．したがって，リスク性資産は，本来は，

$$1+r+R_S=\frac{E^P[S(1)]}{S(0)} \qquad (1\text{-}3\text{-}16)$$

$$1+r+R_C=\frac{E^P[C(1)]}{C(0)} \qquad (1\text{-}3\text{-}17)$$

が成立する．無リスク資産より高いリターンを期待してリスク性資産に投資することを示している．ここに，R_S, R_C は，リスク性資産に対し，リスクに見合った正のリスクプレミアムである．さらに，リスク資産の評価における無裁定の仮定の重要性が明らかになってくる．つまり，$S(0)$ が所与とし，無裁定であれば，正の定数 ψ_1，ψ_2 が存在し，それらを用いていつでもリスク調整済確率測度 Q_1, Q_2 が計算可能となり，

$$S(0)=\frac{1}{1+r}E^Q[S(1)] \qquad (1\text{-}3\text{-}18)$$

$$C(0)=\frac{1}{1+r}E^Q[C(1)] \qquad (1\text{-}3\text{-}19)$$

により現在のコールオプションの価格 $C(0)$ が求まることになる．このように，無裁定価格理論において，リスク調整済確率測度は，中心的な役割を果たす．また，この等式は，便利であり，リスクプレミアムを隠すことができる．実際にこのリスク調整済確率測度 Q_1, Q_2 を用いれば，リスクプレミアムの計算は不要になり，対応する割引率は，容易に観測できる無リスク金利によって求めることができる．

次に，金融工学の重要な概念であるマルチンゲール，完備市場および非完備市場を紹介する．

$S(1)$ の相対価格 $S^S(1)$ を

$$S^S(1)=\frac{S(1)}{1+r}$$

とすると(1-3-6)式は，

$$S(0)=S^S(0)=E^Q[S^S(1)] \qquad (1\text{-}3\text{-}20)$$

となる．これをマルチンゲールと呼び，将来の期待値が現在価格と一致することを示して

いる．また，このリスク調整済確率測度Qを同値マルチンゲール確率測度とも呼ぶ．

将来の動きの方向は，予測不可能である場合に(1-3-20)式が成立し，未観測の将来の最良な予測値は，最後の観測値$S(0)$であることを意味している．このように，変数が$\psi_1, \psi_2, C(0)$で，それ以外は，所与であるとすると３変数，３式の連立方程式から$\psi_1, \psi_2, C(0)$の解が一意に決まる．この市場を完備市場と呼ぶ．つまり，現在の原資産$S(0)$の公正価格が市場価格として一意に把握可能であれば，リスク調整済確率測度Q_1, Q_2（または，状態価格密度）は，一意に決まり，派生資産の現在価格$C(0)$も一意に決まることがわかる．

しかし，保険リスク・デリバティブ商品の原資産は，天候，死亡率等であり，原資産自身は，資本市場で価格評価がされていない．原資産の価格が把握できない条件下での派生商品の価格付けを非完備市場での価格付けという．この場合は，派生商品のペイオフは，原資産により複製法が不可能となり，連立方程式が解けない．リスク調整済確率測度Q_1, Q_2は，一意に決まらず，派生資産の現在価格$C(0)$も一意に決まらない．したがって，$C(0)$を求めるためには，なんらかの方法で，リスク調整済確率測度Q_1, Q_2を特定する必要があることがわかる．マルチンゲール，完備市場および非完備市場は，金融工学のうえで，重要な概念である．詳細は，Neftci[1996]を参照されたい．

以上から，従来からの保険数理理論に基き価格付けした死亡リスクマージンを含んだストップロス再保険を資本市場が金融工学理論を用いて，どのように合理的に評価するであろうか．現在，標準的な手法は存在しない．そこで，次節では，資本市場取引を前提とした保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究を紹介する．

1.4　保険リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する先行研究

死亡リスク・デリバティブ商品の価格付けは，2000 年の Swiss Re による死亡リスクの証券化がきっかけとなってようやく本格的な研究がスタートしたといっていい．しかし，すでに保険リスクのデリバティブの価格付けの研究は，天候デリバティブが先行している．そこで，死亡リスクに関して，参考となる天候デリバティブ商品の価格付けの研究を紹介した後，スタートして間もなく，かつ，数少ない死亡リスク・デリバティブ商品の価格付けに関する最近の研究内容に言及する．

1.4.1　天候デリバティブ商品の価格付けの関する先行研究

天候デリバティブとは，天候を対象要素（気温，降水量，積雪量など）とする派生証券である．天候デリバティブは，企業が，通常一定の事業環境を前提に収支の予算をたてているが，予期せぬ天候の変動による収益変動リスクを回避し，収益安定化を図る目的で利用されている．山田雄二[2000]によれば，1997 年 9 月に米国の総合エネルギー会社であった ENRON 社と Koch 社で最初に取引が始まったとされている．その後，欧米では，主に

エネルギー会社を中心に取引が発展し，いくつかの取引所において，気温先物，気温先物オプションといった商品が上場されている．日本においては，東京電力と東京ガスにより，2001 年夏の気温に関する気温リスク・スワップ取引が最初の取引となった．天候デリバティブ商品の価格付けの研究は，死亡リスクのデリバティブ商品と同様に資本市場での取引のない気象データが原資産となるデリバティブ商品の価格付けの研究となる．したがって，天候デリバティブ商品の価格付けの研究は，死亡リスクのデリバティブ商品の価格付けの研究の大いに助けとなろう．

しかし，天候デリバティブ商品の価格付けは，非完備市場での価格付けなので，標準的な手法は存在しない．

主な手法のタイプには，

①均衡アプローチ理論によるタイプ

②天候の対象要素の相関が高い取引資産の価格をもとに行われるタイプ

③最小分散ヘッジ問題として行われるタイプ

④ベンチマーク・アプローチにより行われるタイプ

⑤リスク中立評価法（リスク調整済確率測度変換法）により行われるタイプ

がある．以下，順を追って紹介する．

まず，均衡アプローチ理論を用いて，気温リスク・オプションの価格付けモデルの研究を行ったのが，Cao and Wei[2000]であり，さらに，実証研究を行ったのが Richards et al[2004]である．

Cao and Wei[2000]は，気温リスク・オプションの価格付けモデルを，代表的投資家の効用に基づく均衡アプローチ（投資と消費における代表的投資家の期待効用最大化問題から導く価格モデル）により提案した．経済における基本的な不確実性が総配当（マーケットポートフォリオの配当とみなしている）と気温によって生起するものと仮定し，指数型効用関数に基づき，将来のペイオフの期待値を総配当に関する異時点間限界代替率（標準的なオイラーの方程式）で割り引く気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案した．ただし，仮定に置いた総配当の確率過程に関する妥当性に課題を残すものである．

Richards et al[2004]は，Cao and Wei[2000]と同じ均衡アプローチをもとに，気温リスク・オプションの価格付けに関する実証研究を行った．具体的には，米国の気温データは，Fresno Weather Station Data，気温の確率過程モデルは，MRBM-J-Arch モデルとし，また，総配当の代替を，個人消費支出として，Fresno County Personal Consumption Expenditure のデータから，時系列分析により，個人消費支出モデルを特定した．さらにリスク回避度は，カルフォルニアの農作物協会の保険料から求め，これらにより，気温リスク・オプションの価格を試算した．

次に，対象要素との相関が高い取引資産の価格をもとに気温デリバティブの価格付けモデルを提案したのが，Davis[2000]，および，Alaton et al[2002]である．

Davis[2000]は，ビジネスが気温に直面する企業の効用を最大にするために気温リス

ク・オプションを利用するモデルを考案した．ポートフォリオの一部をオプションの購入に回したとき，最大効用値がもう少し増加するように，オプションを評価する手法を提案したDavis[1998]を気温リスク・オプションの価格付けに応用したものである．具体的には，気温が幾何ブラウン運動に従うとし，気温と線形関係にあるガスをポートフォリオとして利用した．さらに消費をガスの消費量と仮定して，異時点間限界代替率を状態価格密度とすることにより気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案した．資本市場で気温デリバティブの対象となる気象要素の取引がないとしても，それと相関のある取引可能資産があり，市場参加者にとって誰でも自由に取引（完備市場）ができれば，その価格を基準として保険リスク・デリバティブの価格評価を可能にすることを示した．したがって，このモデルは，原資産の取引がないオプション価格を求めるための重要なモデルと評価できる．ただし，気温とガス消費量との線形関係の妥当性が課題となる．同様な研究を行ったのが，Alaton et al[2002]である．

Alaton et al[2002] は，気温との相関が高いエネルギーオプション価格を利用して，気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案した．具体的には，スウェーデンの日々の経験気温に基づき，気温の確率過程が季節循環式を反映した Ornstein-Uhlenbeck 過程に従うとし，気温との相関の高い Scandic　Energy の 2000 年 12 月のオプションプレミアムよりリスクの市場価格を用いて，気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案した．

次に，ヘッジポートフォリオの最小分散ヘッジ問題から気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案したのが，山田雄二[2005]である．山田雄二[2005]は，電力会社の収益が正規分布に従い，また，気温も正規分布に従うとし，電力会社が気温変動による減収を気温リスク・オプションでヘッジした後のポートフォリオの分散最小化問題から，気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案した．

さらに，ベンチマークアプローチ理論を用いて，非完備市場におけるリスク性資産の価格付けモデルを提案したPlaten[2003b]を応用して，気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案したのが，Platen and West[2003a]であり，実証研究を行ったのが West[2002]である．ベンチマーク・アプローチ手法は，Growth Optimal Protforio(GOP)の期待成長率が市場において最適となるようなポートフォリオをベンチマークとして価格評価を行うものである．

Platen and West[2003a]は，金融市場でのポートフォリオに関する異時点間のベンチマーク比率を状態価格密度として，気温リスク・オプションの価格モデルを提案した．この理論は，ベンチマークと気温との相関が重要な問題となる．特に，ベンチマークと気温が独立の関係にあると仮定すると，結果として，実確率測度によるペイオフの無リスク金利による期待現在価格となり，伝統的な保険数理理論による理論式と一致することを述べている．しかし，独立関係にあるとはいえ，不確実性が存在するにもかかわらず，リスクプレミアムを考慮しない点で課題を残すものである．

West[2002]は，ベンチマーク・アプローチ手法に基づき気温リスク・オプションの価格

付けに関する実証研究を行った．具体的には，シドニーの気温がブラウン運動に従うとして，GOP による気温リスク・オプションの価格を試算した．

最後に，リスク中立評価法を用いて気温リスク・オプションの価格付けモデルを提案したのが，Jewson and Zwrvos[2005]である．リスク中立評価法とは，実確率測度による将来のペイオフの期待値からリスクの市場価格に原資産の価格変動に関する標準偏差を乗じたものを減じて無リスク金利で割り引くことによりオプション価格を求める手法であり，金融資産の現在価格を求める一般的な金融工学の 1 つの手法である．また，実確率測度をリスク調整済確率測度へ変換することにもなるので，リスク調整済確率測度変換法とも言える．

Jewson and Zwrvos[2005]は，完備市場取引を前提に，日々の気温がブラウン運動に従うとし，経験値により，リスクの市場価格を求め，リスク中立評価法により気温リスク・オプションの価格モデルを提案した．ただし，理論式を提案したにとどまり，実証研究は行われていない．

リスク調整済確率測度変換法を用いて降水量リスク・デリバティブ商品の価格付けモデルを提案したのが，名取和洋[2005]である．名取和洋[2005]は，エッシャー変換を用いて降水量に関するリスク・オプションの価格モデルを提案した．具体的には，1 年間降水量が降水日数と 1 日あたりの降水量の複合ポアソン過程に従うとして，リスク調整済確率測度への変換をエッシャー変換を用いることにより，降水量に関するリスク・オプションの価格モデルを提案した．ただし，絶対的リスク回避度の求め方は示されておらず，リスク回避度と降水量に関するリスク・オプション価格の理論式を提示するにとどめている．

以上が，典型的な気温リスク・オプションを中心とした天候デリバティブ商品の価格付けモデルである．

さらに，コストの軽減化が図れる天候リスク・スワップ取引の価格付けモデルを提案したのが，Nraoua and Bari[2005]である．Nraoua and Bari[2005]は，気温リスク・スワップ取引とその価格モデルを提案した．具体的には，カサブランカの日々の経験気温が Vasicek 過程モデルに従うとし，気温が低下すると収益が増加する電力会社と気温が上昇すると収益が増加する清涼飲料水の製造会社とで，一定以上の温度変化によるリスクを交換する気温リスク・スワップとその価格付けモデルを提案した．双方とも，実確率測度のもとでのペイオの期待値を無リスク金利で割り引いた現在価格が等価となるように取引条件を設定するモデルである．したがって，リスク調整を行っていない点で，公正価格としての等価交換かどうかの問題が残る．

以上が天候デリバテイブ商品の価格付けモデルの先行研究である．標準的な手法が存在しないことから，さまざまな手法が採用されているが，年とともに主力手法がリスク中立評価法（リスク調整済確率測度変換法）に移っていることが伺われた．

次に，本論文のテーマである死亡リスクのデリバティブ商品の価格付けモデルに関する先行研究を紹介する．

1.4.2. 死亡リスクのデリバティブ商品の価格付けに関する先行研究

1.4.2.1. 生存リスクの証券化の価格付け

Swiss Re がはじめて死亡リスクの証券化を 2000 年に実施した．Swiss Re の内在する死亡リスクを死亡リスク債券として，資本市場に移転したのである．さらに，翌年に欧州投資銀行（以下，EIB と呼ぶ）が生存リスク債券を発行した．これをきっかけに，死亡リスクのデリバティブ商品とその価格付けモデルの研究がようやく本格的に始まった．主に，リスク調整済確率測度変換法による研究が行われている．

生存リスクの証券化には，主に 2 つのタイプの研究がある．

① 一定以上の生存率によりペイオフが発生するタイプ

② 生存率に比例してペイオフが発生するタイプ

まず，一定以上の生存率が発生するとペイオフが発生するタイプの研究を紹介する．Swiss Re の証券化を参考に，生存リスク・オプションを内包する生存リスクの証券化を研究したのが，Lin and Cox[2005b]であり，さらに Lin and Cox[2005b]の価格モデルを発展させたのが，Hsien et al[2007]である．

Lin and Cox[2005b]は，生命年金保険の証券化モデルを示し，内包する生存リスク債券とその理論価格モデルを提案している．具体的には，65 歳以降の生存数が一定数を超えるとクーポンが減少する長寿リスク債券について，米国経験死亡率の確率分布（確率分布関数を特定してはいない）と米国生命保険会社の保険料によるリスクの市場価格(Market Price of Risk)を用いて，ワン変換により，価格付けモデルを提案した．なお，エッシャー変換が確率密度関数の変換に対し，ワン変換は，確率分布の変換である．なお，死亡率の分布関数モデルを特定せず，経験値のままの確率分布を使用している．ワン変換に関する詳細は，Wang[2000]参照のこと．この証券化モデルも，確定金額である保険料を得て，不確実なペイオフの支払義務を負う負債サイドのモデルである．

Hsien et al[2007]では，Lin and Cox[2005b]をさらに発展させ，死亡率の確率分布関数を特定して長寿リスク債券の価格付けモデルを提案した．具体的には，FEL(Feller Process)の死力の確率過程モデルを用い，米国の経験死亡率と Lin and Cox[2005b]で求めたリスクの市場価格(Market Price of Risk)の数値をそのまま用いたモデルであった．

一方，生存率に比例してペイオフが発生するタイプの研究を紹介する．EIB の長寿リスク債券を参考に一般的な長寿リスク債券の価格付けモデルを提案したのが，Cairns et al[2006]，Blake et al[2006]および，Michel et al[2007]である．EIB の長寿リスク債は，2004 年 11 月に EIB が発行し，期間 25 年，発行額約 540 百万ポンドで，クーポンは，イングランドとウェールズの 2003 年の 65 歳の生存人口に対し，その後の生存率を反映して決められている．つまり，この長寿リスク債は，クーポンが生存率に比例して減少する

債券である．したがって，一定以上の生存率を条件にクーポンの額が決定される Lin and Cox[2005b]の長寿リスク債券と異なり，EIB の長寿リスク債は，単に生存率に比例してクーポンの額が決定される長寿リスク債券（以下，EIB タイプの長寿リスク債券と呼ぶ）である．つまり，この証券化モデルは，確定金額で投資し，不確実なペイオフを得る資産サイドモデルである．

Cairns et al[2006]は，EIB が発行した長寿リスク債券に内在する金利スプレッドが 20 ベーシスポイントであることから，リスクの市場価格を求め，気温リスク・オプションの価格モデルを提案した Jewson and Zwrvos[2005]と同様な手法を用いて，長寿リスク債券の価格付けモデルを提案した．具体的には，イングランドとウェールズの国民生命表，2-factor model である *Perks* [1932]の死亡率過程モデル，および，金利スプレッドから，リスク中立評価法により，公表されていないこの EIB の長寿リスク債券の価格メカニズムを解明した．

また，Blake et al[2006]は，１-factor model で生存率の確率分布関数から Lin and Cox[2005b]と同様に，ワン変換によるリスク調整済確率測度変換法により，EIB タイプの長寿リスク債券の価格付けモデルを提案した．

さらに，Michel et al[2007]は， EIB タイプの長寿リスク債券の価格付けモデルの実証研究を行った．具体的には，Lee Carter の死亡率過程モデルを採用し，ベルギー政府が示したリスク調整済の標準生存率から，リスクの市場価格を求め，ワン変換によるリスク中立評価法を用いて長寿リスク債券の価格付けモデルを提案した．

Consumption Capital Asset Pricing Model(以下，CCAPM と呼ぶ)により EIB タイプの長寿リスク債券の価格付けモデルの提案したのが，Friedberg and Webb[2005]である．Friedberg and Webb[2005]は，過去に当てはめて求めた EIB タイプの長寿リスク債券の収益率と個人消費支出の伸び率に逆相関を見い出し，CCAPM を用いて長寿リスク債券の価格付けモデルを提案した．具体的には，長寿リスク債券の収益率は無リスク債券の収益率にリスクプレミアムを加えたものとし，このリスクプレミアムは，長寿リスクの収益率と個人消費支出の限界効用との共分散により求められることを提案した．

上記２つのタイプとは異なり，生命保険契約が完備市場において取引可能であることを前提に，生存リスク債券の価格モデルを提案したのが Bauer「2006」である．Bauer「2006」は，生命保険契約と生存リスク債券が資本市場で自由に取引可能とする完備市場を前提に，保険期間１年，保険金１の生存保険と償還期間１年，額面１の生存リスク債券が１年後の生存保険金額と生存リスク債券の償還額が一致することから，無裁定下では，契約時点（0 時点）の保険料と債券投資額が同額でなければならないと主張している．つまり，完備市場において，生命保険の使用している生存率をリスク調整済の生存確率と仮定して，この生存確率を用いて生存リスク債券の価格付けモデルを提案したのである．

1.4.2.2. 長寿リスク債券の変動クーポンと通常の債券の固定クーポンとを交換するス

ワップ取引の価格付けの研究

長寿リスクの証券化とともに，リスクの外部移転手段として，長寿リスク債券とリスクのない債券とのスワップ取引があるが，この価格付けモデルを提案したのが，Kevin et al[2006]である．Kevin et al[2006]は，変動金利と固定金利を交換する金利スワップを生存率に応用して,長寿リスクの変動クーポン型債券と固定クーポン型債券とのSurvivor Swaps（生存リスク・スワップ）を提案した．具体的には，米国の経験年金生存率を下に，生存率がガンマ分布に従うとして，ワン変換によるリスク調整済確率測度変換法を用いて，変動クーポン型債券と固定クーポン型債券の期待現在価値が等価となるよう固定クーポンを求めるモデルを提案した．ただし，実証では，リスクの市場価格が求められないことから，リスクの市場価格と金利による固定クーポンへの感応度テーブルを示すにとどめていた．

1.4.2.3.死亡リスクと長寿リスクのスワップ取引の価格付けモデルの研究

さらに，死亡リスクと長寿リスクのスワップ取引の価格モデルを提案したのが，Chrupat and Milevsky[2001]およびLin and Cox[2005a]である．Chrupat and Milevsky[2001]は，完備市場での取引を想定し，終身年金保険と終身保険のスワップ取引とその価格付けモデルを提案した．具体的には，この2つの商品を組み合わせることにより，投資1を即時払終身年金の一時払保険料に充当し，同時に死亡保険金1の年払保険料による終身保険に加入する．この2つの商品の組み合わせは，投資1に対し，必ず死亡保険金として1が返戻される無リスクポートフォリオを形成することができると解釈する．したがって，毎年の年金収入と年払保険料支払いの差額が年間収益とし，無リスク収益率となる．このことから，スワップ契約の価格付けは，契約条件となる死亡保険金1に対し，現在価値が等価となる年金額を設定することで行われた．

また，Lin and Cox[2005a]は，Nraoua and Bari[2005]の気温リスク・スワップ取引と同様な研究を死亡リスク・スワップ取引において行った．具体的には，35 歳加入の死亡保険契約集団と65歳加入の即時払終身年金の契約集団の将来10年間のペイオフを交換するスワップ取引であり，その価格付けは，各リスク調整済確率測度上における将来ペイオフの期待現在価格が等価となる契約条件を設定することにより行われた．なお，このリスク調整済確率測度は，ワン変換より求め，リスクの市場価格は，期間を通じて一定として米国の保険市場における保険料，および，それぞれの米国の経験死亡率の確率分布により求めた．

以上が先行研究の内容であるが，本研究は，死亡リスクに関して，伝統的な保険料計算原理と金融工学理論双方を結び付ける派生商品の価格モデルを提案したい．そこで，金融デリバティブ商品の価格付けにエッシャー原理を応用したGerber and Shui[1994]を紹介

する．Gerber and Shui[1994]は，生命保険と金融の融合商品の価格付けが完備市場のみならず，非完備市場においても適用可能なモデルを提案したのである．

1.5　Gerber and Shui[1994]の保険料計算原理と無裁定価格理論を結び付ける価格付けモデル

1.5.1 完備市場の価格付けモデル

Gerber and Shiu[1994]は，保険料計算原理のなかのエッシャー原理と，無裁定価格理論を導入し，よく知られているブラックショールズのモデルによらない株価オプション（ヨーロピアンコールオプション）の新たな価格付け理論を構築した．派生商品の無裁定理論価格モデルを市場参加者のリスク回避度を考慮したエッシャー原理を用いて示したのである．この理論は，生命保険と金融の融合商品の価格付けにも応用できるものとして評価できる．具体的には，エッシャー原理は，リスク調整済確率測度への変換手法の一つであることを示し，その測度変換の利用条件は，任意の派生商品のペイオフが確率過程に従うときに，その確率分布がモーメント母関数を持つことである．従って，対数正規分布は勿論のこと，離散型，連続型と幅広い確率分布に適応可能である．エッシャー原理が，今後の多様化，複雑化する新たな派生商品の価格付け理論の構築に極めて有効な理論であることをGerber and Shiu[1994]は，示唆している．ここでは，完備市場において，原資産が幾何ブラウン運動過程に従うとき，エッシャー原理を用いた株価オプション価格モデルを示し，このモデルが，ブラックショールズの価格モデルと一致することを示す．以下，その概要について述べる．

株価オプション価格理論の公正価格を求めるにあたり，各期の株価をつぎのとおり定義する．

$S(t)$ は，経過 t 時点の株価，

$S(0)$ は，現在の株価，

とする．なお，すべての不確実性は，フィルトレーション $\{F_t : 0 \le t \le N\}$ を備わった確率空間 (Ω, F, P) により表現される．さらに，時点 t までの情報は，F_t により与えられる．また，F_t を条件とする確率測度 P の条件付期待値を E^P と表す．

各期の $S(t)$ が幾何ブラウン運動過程に従うものとすると，各期の $S(t)$ の確率過程（実確率測度 P ）は，

$$S(t) = S(0)\exp(Y_t) \tag{1-5-1}$$

となる．この Y_t は，正規分布 $N(\mu t, \sigma^2 t)$ に従う．なお，μ, σ^2 は，所与とする．

この Y_t を，エッシャー原理により，実確率測度 P と同値測度となるリスク調整済確率測

度 Q へ変換すると，ラドン・ニコディム微分によるエッシャー測度変換式は

$$\frac{dQ(Y_t)}{dP(Y_t)} = \frac{e^{-\theta Y_t}}{E^P[e^{-\theta Y_t}]} \tag{1-5-2}$$

となる．さらに， Y_t の確率密度関数 $f(Y_t,t)$ は新たな確率密度関数 $f(Y_t,t,\theta)$,

$$f(Y_t,t,\theta) = \frac{e^{-\theta Y_t}}{E^P[e^{-\theta Y_t}]} f(Y_t,t)$$

となり，このモーメント母関数は,

$$M(z,t \mid \theta) = \frac{E^P[e^{(z-\theta)Y_t}]}{E^P[e^{-\theta Y_t}]}$$

$$= \exp\{(\mu - \sigma^2\theta)tz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 t\} \tag{1-5-3}$$

となる．ここで， θ は，絶対的リスク回避度とする．これは，エッシャー原理により平均値のパラメーター μ が， $\mu - \theta\sigma^2$ に変わったことを示している．

さらに，完備市場取引とすると，無裁定価格理論の条件であるマルチンゲールの導入により,

$$e^{-rt}E^Q[S(t)] = S(0) \tag{1-5-4}$$

が成立するはずである．さらに式を展開すると，(1-5-4)の両辺を $S(0)$ で除して，(1-5-1)から,

$$E^Q[e^{Y_t}] = e^{rt} \tag{1-5-5}$$

となり，(1-5-3)式を $z=1$ として(1-5-5)式に代入すると

$$\exp(\mu t - \theta\sigma^2 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \exp(rt) \tag{1-5-6}$$

から,

$$\mu t-\theta\sigma^2 t=rt-\frac{1}{2}\sigma^2 t \qquad (1\text{-}5\text{-}7)$$

となる．したがって，無裁定価格理論のもとでの新たなリスク調整済の確率過程は，

$$S(t)=S(0)\exp(Y_t) \qquad (1\text{-}5\text{-}8)$$

となる．

ここに，Y_t は，正規分布 $N(rt-\frac{1}{2}\sigma^2 t,\sigma^2 t)$ に従う．また，r は，無リスク金利である．

完備市場の場合は，絶対リスク回避度 θ は，

$$\theta=\frac{2(\mu-r)+\sigma^2}{2\sigma^2}$$

となり，無リスク金利と μ,σ^2 から一意に決定される．なお，$\frac{\mu-r}{\sigma}$ は，リスクの市場価格と呼ばれるので，θ は，リスクの市場価格の関数となる．

上記 $S(0)$ を現在の株価とし株式 $S(t)$ を原資産として，株式のヨーロピアンコールオプションの理論価格 $Call$ を求めると．

$$Call=E^Q[e^{-rt}\{\max(S(t)-A_k,0)\}]$$

となる．ここで，A_k は，権利行使価格である．これを解くと

$$Call=S(0)N(d_1)-A_k e^{-rt}N(d_2) \qquad (1\text{-}5\text{-}9)$$

ここに，

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S(0)}{A_k})+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (1\text{-}5\text{-}10)$$

$$d_2=\frac{\ln(\frac{S(0)}{A_k})+(r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (1\text{-}5\text{-}11)$$

$N(d)$ は，標準正規分布の累積分布関数である．

この式はブラックショールズの公式そのものである．ブラックショールズの公式は，Black and Scholes[1973]を参照されたい．なお，株式のヨーロピアンコールオプションのペイオフを

$$\chi(S(t)) = \max(S(t) - A_k, 0)$$

と置く．このとき，実確率測度 P のもとでの Y_t の確率密度関数を $f^P(Y_t)$ とすると，確率測度 Q のもとでの Y_t の密度関数 $f^Q(Y_t)$ は，

$$f^Q(Y_t) = \frac{e^{-\theta Y_{t_1}}}{E^P[e^{-\theta Y_t}]} f^P(Y_t)$$

となる．その結果，$\theta > 0$ ならば，

$$E^Q[\chi(Y_t)] \leq E^P[\chi(Y_t)] \tag{1-5-12}$$

となる．すなわち，ヨーロピアンコールオプションの価格は，実確率測度 P に基づくペイオフの割引期待値より小さくなる．このことは，リスク資産の価格が単なる実確率測度による割引期待値よりリスク分だけ低くなることを意味する．

保険料計算原理の中のエッシャー原理では，(1-2-6)式となり，2 つの確率測度 P,Q のもとで，(1-2-5)式と期待値の大小関係が異なるが，これは，(1-2-5) 式と (1-5-2) 式のとおり，ラドン・ニコディム微分の θ の符号が異なる結果である．株式のヨーロピアンコールオプションの評価は，資産サイド（確定金額で投資し，不確実なペイオフを得る）のリスクの評価であるのに対し，保険料計算原理は，負債サイド（確定金額である保険料を得て，不確実なペイオフの支払義務を負う）からのリスク評価のためである．

1.5.2 非完備市場の価格付けモデル

ブラック・ショールズの公式は，完備市場での株式のヨーロピアンコールオプションの価格モデルである．

さらに Gerber and SHui[1994]は，エッシャー原理を用い，完備市場の価格付けモデルだけではなく，(1-5-3)式の絶対リスク回避度を求めれば，保険リスクのデリバティブ商品のように原資産が資本市場で自由取引されない場合の価格付けにも，有力な手法であることがわかる．具体的には，(1-5-3)式のとおり，エッシャー原理によりドリフト項のパ

ラメーターμを，$\mu+\theta\sigma^2$とするリスク調整済確率測度に変換(エッシャー変換)ができれば，派生商品の価格付けが可能となる．実際に，不確実な支払義務を負うタイプの死亡リスク・デリバティブ商品の価格付けは，従来の保険料計算原理を採用している生命保険会社の保険料に含まれるリスクマージンに基づき，絶対リスク回避度を求め，さらにエッシャー変換を使用することが合理的である．

1.6. 結論

本章では，生命保険と金融との融合商品に係る価格付けの研究に着目し，双方の基本概念と近年の研究動向についてまとめた．

生命保険と金融の価格付け理論については，発展の経緯が異なる．しかし，天候デリバテイブ，死亡リスクの証券化等，融合商品が出現したことにより，これらの商品の価格付け理論の構築が必要となった．

保険リスクのデリバティブ商品の価格付けについては，標準的な手法が存在しないことから，いくつかの価格付け手法の研究がなされていた．また，最近では，リスク調整のための確率測度変換法が多く，今後の主力手法となることが予想される．しかし，研究内容を見ると，伝統的な手法である保険料計算原理との融合的な手法は，ほとんどない．唯一，Gerber and Shui[1994]が，保険料計算原理の中のエッシャー原理を用いた手法が確立した．Gerber and Shui[1994]は，完備市場の価格付けモデルだけではなく，原資産が市場で取引されない生命保険と金融の融合商品の価格付けにも，有力な手法を提案したのであった．そこで，本研究は，次章より，Gerber and SHui[1994]の価格付けモデルを参考に，非完備市場取引を前提として，現在の生命保険料に含まれるリスクマージンに基づき，死亡リスクの証券化の価格付けモデルを第2章，長寿リスクの証券化の価格付けモデルを第3章，第4章では，死亡リスク・スワップ取引の価格付けモデルを，その実証研究とあわせて詳しく述べることとした．

第２章　生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け

2.1 はじめに

最近になって，リスク管理の重要性が増している．その背景は，米国においては，エンロン，ワールド・コムの事件発生を受けて，2002 年度の企業改革法が施行されたことにある．そのもとで，企業は，健全なコーポレート・ガバナンスの体制が要求され,具体的には，企業は，統合的リスクマネジメントを実施し，リスクマネジメント体制に関する情報開示が必要となった．それを受けて日本においても，2003 年 3 月 31 日の企業内容等の開示に関する内閣府令等の一部を改正する内閣府令第 28 号により，2003 年 4 月以降，上場企業は，有価証券報告書にコーポレート・ガバナンスやリスク等に関する情報開示が義務付けられた．従って，企業は，リスク許容量を設定し，認識されたリスクを内部で管理するか，外部に移転するかを分類し管理しなければならない．証券化は，リスクを外部に移転する１つの手段である．

この証券化の技術は，現代ファイナンスの最も重要な変革の１つである．流動化する必要がある資産について，直接売却できる市場がないか，未熟な場合に証券化により，流動化が可能になる．1970 年代にモーゲージローンの事例より始まり，それ以降，証券化の対象となる資産も多様化し，市場も急激に拡大を遂げて現在に至っている．証券化によって，新たな資金の流れを作ることで，経済の活性化を促す効果が期待される．特にリスクの証券化は，資産自体がもつリスクを分析し，それに見合うプレミアムをのせることによって，資本市場へのリスクの転嫁を図ろうとするものである．リスクの保有者は，リスクを資本市場に移転できる．一方，投資家は，高い収益率を得，かつ一般の金融資産との相関係数が低い商品をポートフォリオに組み入れることができる．このようなことから，リスクの証券化市場が拡大してきている．

1994 年に保険会社にとって画期的な変化があった．Hannover Re(独)が初のカタストロフィー債券を発行したのである．それ以来，地震，ハリケーン等大災害を対象に市場が拡大している．その背景は，資本市場のリスク吸収力が，再保険市場に比べ格段の違いがあるためである．リスク管理の面で，資本市場は，さらに重要な役割を担うようになった．カタストロフィー債券は，保険会社が持つ偶発事象を対象にしたリスクの証券化商品である．これに対し，生命保険会社の通常事象を対象にしたリスクの証券化商品には，死亡リスク債券と生存リスク債券がある．ともに，将来の保険金等支払額についての不確実性をリスクとして，証券化したものである．具体的には，将来の一定以上の保険金等支払が生じたときにクーポンまたは，償還額が減少し，一方，一定未満の支払では，無リスク債券より高い利回りが得られる債券である．この利回りの無リスク金利を上回る部分は，この債券に内在するストップロス再保険の価格により決定される．従って，死亡リスク債券および

生存リスク債券の価格付けは，ストップロス再保険の価格付けによって行われる．

カタストロフィー債券に遅れること 10 年，2003 年 12 月に Swiss Re が世界初の生命保険の証券化である死亡リスク債券を発行した． Lin and Cox [2004]や Cummins[2004]の研究によれば，死亡リスク債券の内容は，以下のとおりである．

(1) 発行額は，4 億ドル
(2) 期間は，3 年，発行日は，2003 年 12 月で，償還日は，2007 年 1 月である．
(3) クーポンレートは，Libor+1.35%である．
(4) 米国，フランス，スイス，英国，イタリアの国民死亡率に基づく 2002 年度の死亡率指標を 100 とし，償還日までに最も高い指標が 130 以上であれば，債券の元本が減少し，150 以上であれば，元本がゼロとなるインデックスタイプの死亡リスク債券である．

Swiss Re は，自身のリスク管理のために，内在する死亡リスクを資本市場に移転する証券化を実施したものと解釈できる．

この Swiss Re の証券化を参考に，生存リスクの証券化を研究したのが，Lin and Cox[2005b]である．Lin and Cox[2005b]は，生命年金保険を証券化した生存リスク債券とその理論価格モデルを提案している．具体的には，65 歳以降の生存数が一定数を超えるとクーポンが減少する債券であり，死亡率の分布関数とリスクの市場価格(Market Price of Risk)を用いて，ワン変換 [2]によるストップロス再保険の理論価格モデルを提案した．資本市場に放出することを前提とした価格理論を導入している．

これに対し，本研究は，定期保険を保有している生命保険会社がその契約量の規模から大数の法則が働かないために生じる死亡リスクを，リスク許容量を考慮して証券化した死亡リスク債券とその理論価格モデルを考察した．具体的には，死亡リスク債券を定期保険の契約集団を対象とし，直近 1 年間の死亡保険金支払総額の最高額が一定以上であれば，償還額が減少し，一方，一定未満であれば，無リスク債券より高い利回りが得られるゼロクーポン債券とした．さらに，この債券に内包するストップロス再保険の価格付けモデルは，死亡数の確率過程モデルに基づき，保険料よりリスク調整済確率測度を求め，エッシャー変換による理論価格モデルを提案した．Swiss Re の死亡リスク債券と異なる点は，インデックスタイプの証券化ではなく，ベーシスリスクを排除するため，生命保険会社が保有する死亡リスクを直接対象とした特定タイプの証券化を想定したことである．

まず，不確実な将来の死亡保険金支払額を導き出す死亡数の確率過程を定式化する必要がある．この先行研究として，Milevesky and Promislow[2001]の平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデル，Gaurilov and Gavriova[2001] の信頼性理論を応用した生存率確率過程モデル，および死亡率が毎年改善されていることをモデルに反映させるため，観察年度の自己回帰過程を求め，年齢によるパラメータとの一次結合として表した Lee and Cater [1992]の死亡率確率過程モデルがあげられる．

[2] ワン変換については，*Wang*[1995,2000] を参照されたい．

これに対し，本研究では，簡易生命表から，生命保険会社が保有する定期保険契約のウエイトの高い成人層について，同時出生人口の年齢別死亡率の対数が直線に近いことが判明した．そこで，簡易生命表を用いて，実際にコーホートによる時系列分析を行い，死亡数の連続時間確率過程モデルを求めることとした．この結果，時系列分析によるモデルは，趨勢のあるランダムウォークとなり，先行研究のモデルよりシンプルなモデルを提案した．つぎに，証券化により資本市場で評価することを前提に，Gerber and Shui[1994]の非完備市場におけるエッシャー変換によるストップロス再保険の理論価格モデルを求めることとした．

その結果，死亡リスク債券の価格付けとなるストップロス再保険の理論価格モデルを提案し，償還額を求めた．

本章は，以下のような構成になっている．2 節では，本研究の生命保険の証券化モデルを示す．また，3 節では，死亡数の確率過程を示し，4 節では，死亡リスク債券の価格付けを示した．最後に 5 節で，本研究の結論と今後の課題について述べることとした．

2.2 生命保険の証券化モデル

この節では，生命保険の証券化モデルの説明を行う．具体的には，Lin and Cox[2005b]の生存リスクを対象にした生命年金の証券化モデルを紹介し，本研究の死亡リスクを対象とした定期保険の証券化モデルを提案する．

Lin and Cox[2005b]の証券化モデルは，通常事象である生存リスクを対象にした生命年金の証券化モデルである．具体的には，65 歳以降の生存数に基づく毎年の支払生命年金額が一定以上になるリスクを資本市場に移転する証券化モデルを提案した．証券化の契約形態は，生命保険会社と SPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約を締結し，同時に SPC は，投資家に対し，生存リスク債券を発行する．具体的には，まず，再保険金 O_t を，条件により以下のとおりとしている．

条件 1 ：$l_\omega(t) > W_t + C$

　このとき　$O_t = 1000C$，

条件 2 ：$W_t < l_\omega(t) \le W_t + C$

　このとき　$O_t = 1000(l_\omega(t) - W_t)$，

条件 3 ：$l_\omega(t) \le W_t$

　このとき　$O_t = 0$

ここに，

(1) $l_\omega(t)$ を $\omega + t$ 歳の生存数（生命年金受取人数），

(2) W_t を経過 t 時点のエクセスポイント，

(3) C は，再保険金 O_t の上限を示すパラメーター，

(4) t を経過時点とする． $0 \le t < T$

である

次に，生存リスク債券の内容は，

(1) クーポン債，

(2) 債券の期間を終身年金の一部 T 年に限定，

(3) 生存リスクは，債券のクーポン（U_t）にのみ反映する

こととしている．また，債券の経過 t 時点のクーポン U_t は，

条件 1 ：$l_\omega(t) > C + W_t$

このとき $U_t = 0$,

条件 2 ：$W_t < l_\omega(t) \le C + W_t$

このとき $U_t = 1000(C + W_t - l_\omega(t))$,

条件 3 ：$l_\omega(t) \le W_t$

このとき $U_t = 1000C$

としている．

毎年の生存数 $l_\omega(t)$ が W_t を超えるとその期のクーポン U_t が減少し，さらに生存数が $W_t + C$ 以上であれば，その年のクーポンが 0 となる生存リスク債券である．これによって生命保険会社が保有する生命年金保険に関する生存率改善のリスクを資本市場に移転することができるのである．

これに対し，本研究は，通常事象である死亡リスクの証券化モデルを提案する．具体的には，生命保険会社が保有する 1 年以上経過した短期定期保険契約集団を直接証券化の対象とし，このなかの同一死亡リスク集団（同一年齢，性別，残存保険期間，保険金）ごとに，期間中の最高年間死亡保険金支払総額が一定以上となるリスクを資本市場に移転する証券化モデルである．また，証券化の契約形態は，生命保険会社と SPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約（再保険金 S_2，保険料一時払 π_2）を締結し，同時に SPC は，投資家に対し，死亡リスク債券を発行する．また，投資家から集まった資金（投資額，所与とする）$\overline{A}$ と再保険料 π_2 は，安全資産（無リスク資産）へ投資することとした．

次に，死亡リスク債券の仕組みは，

(1) ゼロクーポン債，

(2) 債券の期間を生命保険契約の残存保険期間に合わせて n 年，

(3) 死亡リスクは，債券の償還総額$\overline{B}$に反映する

ことと仮定する．

償還額$\overline{B}$は，投資額$\overline{A}$と再保険料π_2を償還期まで，安全資産に投資した元利合計から，再保険金S_2を減じたものとする．式で表すと，

$$\overline{B} = (\overline{A} + \pi_2)e^{rn} - S_2 \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

である．ここに，rを無リスク年率金利とする．

再保険金S_2は，以下のように仮定した．

条件 1 ：$G \le A_\alpha$

このとき　$S_2 = 0$，

条件 2 ：$A_\alpha < G \le A_\beta$

このとき　$S_2 = \overline{A}\left(\dfrac{G - A_\alpha}{A_\beta - A_\alpha}\right)$，

条件 3 ：$G > A_\beta$

このとき　$S_2 = \overline{A}$

ここに，

(1) ωを債券発行時の定期保険契約の被保険者年齢とする．

(2) Xを一人当たりの死亡保険金（定数）とし，その支払は，期末払とする．

(3) $d_\omega(t)$を直近 1 年間すなわち経過期間[t−1, t]の死亡数とする．

(4) $Xd_\omega(t)$を$d_\omega(t)$に対する死亡保険金支払総額とする．

(5) $Xd_\omega(0)$を債券発行時直前 1 年間の$d_\omega(0)$に対する死亡保険金支払総額（実績：所与）とする．

(6) A_αをエクセス・ポイントとする．

(7) $A_\beta - A_\alpha$をカバー額とする．

(8) Gは，期中$Xd_\omega(t)$の最大値とする．

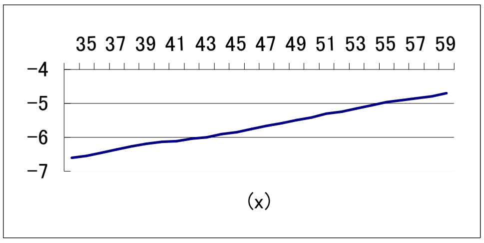
死亡保険金支払総額$Xd_\omega(t)$の最高額Gが一定以上であれば，償還額が減少し，一方，一定未満であれば，無リスク債券より高い利回りが得られるゼロクーポン債券である．これによって生命保険会社が保有する定期保険に関する死亡率の悪化によるリスクを資本市場に移転することができるのである．

この死亡リスク債券の不確実な部分が，期中死亡保険金支払総額のもととなる死亡数である．従って，死亡リスク債券の価格付けには，死亡数の確率過程モデルの定式化が問題

となる．以下，すべての不確実性は，フィルトレーション $\{F_t : 0 \le t \le n\}$ を備わった確率空間 (Ω, F, P) により表現する．さらに，経過 t までの情報は， F_t により与え，また， F_t を条件とする確率測度 P の条件付期待値を $E^P[\cdot]$ と表すことにする．これらの条件に基づき，死亡数の確率過程モデルの定式化を行い，さらに，死亡リスク債券の価格を決めるストップロス再保険料が求めることにした．

2.3 死亡数の確率過程

この節では，死亡数の連続時間確率過程モデルを提案する．まず，簡易生命表により，1943 年生まれ，35 歳から 60 歳までの対数死亡率 $\ln q_x$（ここに， x は，年齢)をグラフで示すと，［図 2-1]のとおり線形に近い．もし，線形とみなせれば，対数死亡数の確率過程モデルがランダムウォークになる可能性がある．この点を踏まえて，死亡率の確率過程モデルを調査した結果，以下の参考となる先行研究があげられる．



［図 2-1］1943 年生まれ， $\log q_x$

2.3.1 確率過程モデルの先行研究

2.3.1.1Milevesky and Promislow[2001]の平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデル

金利の期間構造モデルを死亡率に応用したモデルである．償還 T 時点のゼロクーポン債について， t 時点の無裁定理論価格 $B(t,T)$ は

$$B(t,T) = E^Q[\exp(-\int_t^T r_u du \mid F_t)] \tag{2-3-1}$$

と表せる．ここに， r_u は，期間 u の無リスク金利， E^Q は，リスク中立確率による期待値関数である．このモデルを生存確率に応用して，t 時点で生存している条件での T 時点の生存確率を，

$$p_t(T) = E^Q[\exp(-\int_t^T h_u du \mid F_t)] \tag{2-3-2}$$

と表した．ここに，

$$h_t = h_0 \exp(gt + \sigma Z_t), g, \sigma, h_0 > 0 \tag{2-3-3}$$

$$dZ_t = -cZ_t dt + dB_t^h, Z_0 = 0, c \geq 0$$

B_t^h は，ブラウン運動過程である．このモデルが，平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデルである．仮に，$c=0$ であれば，指数分布型になる．

2.3.1.2Gaurilov and Gavriova[2001]の生存率確率過程モデル.

機械の構造信頼性理論を用いていたモデルである.具体的には,ワイブルの法則を用いて,年齢 ω の死力 $h(\omega)$ を

$$h(\omega) = \eta \omega^{\kappa} \tag{2-3-4}$$

と表した．ここに，$\eta, \kappa > 0$ とする．

従って，$h(\omega)$ に平均 0，分散 σ^2 の残差項 ε_x を加えれば，ω 歳の時点で生存している条件での $\omega + T$ 歳時点の生存確率は,

$$p_{\omega}(T) = E^P[\exp(-\int_{\omega}^{\omega+T} h(u)du \mid F_t)] \tag{2-3-5}$$

として表すことができる．仮に，$\kappa = 0$ であれば，指数分布型になる．

2.3.1.3Lee and Cater [1992]の死亡率確率過程モデル.

平均死亡率の対数を年齢と観察年度の１次結合として求めた指数分布型のモデルである.

$$\ln(m_{\omega,t}) = a_{\omega} + b_{\omega}\kappa_t + \varepsilon_{\omega,t} \tag{2-3-6}$$

$$k_t = k_{t-1} + d + e(t) \tag{2-3-7}$$

ここに，$m_{\omega,t}$ は，年齢 ω，観察年度 t の平均死亡率，k_t は，死亡率の変化指数，a_{ω}, b_{ω} は，年齢によるパラメータ（定数），$\varepsilon_{\omega,t}$ は，平均 0，分散 σ^2 の残差項，d は，定数項，$e(t)$ は，誤差項である．k_t は，ARIMA により求まった自己回帰過程であり，観察年度による死亡率の改善が大きいときに有効なモデルである.

Milevesky and Promislow[2001]と Gaurilov and Gavriova[2001]のモデルは，全年齢

を対象としているため，複雑な式となっている．また， Lee and Cater [1992]のモデルは，観察年度による死亡率の改善が大きいことから，観察年度により死亡率の時系列分析を行っているが，昨今，死亡率の改善がおさまっており，観察年度ではなく，年齢による時系列分析の方が有効と判断できる．

本研究では，証券化の対象を生命保険会社が保有する短期の定期保険契約とし，その商品の保有層を考慮して，ウエイトの高い成人層を対象とした．従って，この限定した年齢による時系列分析に基づき，死亡数の確率過程モデルを求めた．また,離散時点で観測される標本から次のとおり,連続時間確率過程モデルを求めた．具体的には，時系列分析の標本を，1962-2003 年度簡易生命表男子 35-60 歳の死亡率とした．次に，同時出生死亡数（コーホート）に並び替えて，年齢による時系列分析を行った．35 歳 (ω) を時系列分析のスタート時点の年齢とし，その期首の同時出生生存数に対して，その後の経過 t 年度（離散時点）の死亡数 $D_{\omega}(t)$ を求め，この死亡数 $D_{\omega}(t)$ により時系列分析を行った．その結果，死亡数 $D_{\omega}(t)$ の対数差が，趨勢のあるランダムウォークに従うことがわかり簡単なモデルとなった．このプロセスについて，最新判明分 1943 年生まれの対数死亡数 $\ln D_{\omega}(t)$ で例示すると，以下のとおりである．

2.3.2 同時出生対数死亡数の到達年齢による時系列分析

2.3.2.1 モデルの同定

$\ln D_{\omega}(t)$ を説明するために，自分自身の過去を説明変数とする回帰モデル

$$\ln D_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + \phi_1 \ln D_{\omega}(t-1) \quad + \phi_2 \ln D_{\omega}(t-2) + \phi_3 \ln D_{\omega}(t-3)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot + \phi_f \ln D_{\omega}(t-f) + u_{\omega}(t) \tag{2-3-8}$$

を $AR(f)$ と記す．ここで，ϕ_i と μ_x はパラメータである．この次数 f を $SBIC$ によって決める．具体的には，推定式の誤差を表した $SBIC$ が最小となる次数を採択するのである．この結果，表 2-1 のとおり $AR(1)$ が最小のため，次数 1 を採択した．

表 2-1．同定

	μ_x	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$SBIC$
$AR(1)$	0.0798	0.9987			−7.4892
$AR(2)$	0.1024	0.9742	0.0210		−7.3694
$AR(3)$	0.0623	1.0309	0.2192	−0.2520	−7.3046

従って，モデルは,

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$$

となった．次に，もし，$\phi_1 = 1$ であれば，

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \qquad (2\text{-}3\text{-}9)$$

となり，趨勢をもつランダムウォークモデルの可能性がある．従って，$\phi_1 = 1$ の検定，すなわち，単位根検定を行う．

2.3.2.2 単位根検定

検定方法は，F 値タイプの検定である．具体的には，

(1)帰無仮説

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$$

(2)対立仮説

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \beta_1^{'} t + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$$

として，検定を行った結果，表 2-2 のとおり両側有意水準 5%で帰無仮説は，棄却されなかった．

表 2-2．単位根検定　F 値タイプのテスト

F 値統計量	臨界値 5%水準	臨界値 95%水準
1.41	1.08	7.24

従って，このモデルは，(2-3-9)式になった．次に，(2-3-9)式による推定結果との残差を算出し，このモデルが正しいかどうかの診断を行う．

2.3.2.3 モデルの診断

モデルの診断は，まず，残差系列を求め，その残差系列を用いて，系列的に独立か否かの統計的検定を行うものである．もし，このモデルが正しければ，残差系列は独立のはず

である．検定方法は，$Ljung-Box$ 検定である．具体的には，

(1) 帰無仮説　ラグ 5 までの残差系列が独立
(2) 対立仮説　ラグ 5 までの残差系列のなかで少なくとも 1 つは従属

として，検定を行った結果，表 2-3 のとおり，帰無仮説は，有意水準 5%で棄却されなかった．

表 2-3．残差自己相関の検定

$Ljung-Box$ 統計量	臨界値 5%水準
4.10	11.07

診断の結果，(2-3-9)のモデルを採択した．以上により，死亡数 $D_\omega(t)$ の対数は，趨勢のあるランダムウォークと仮定した．以下，改めてこのモデル式を示すと

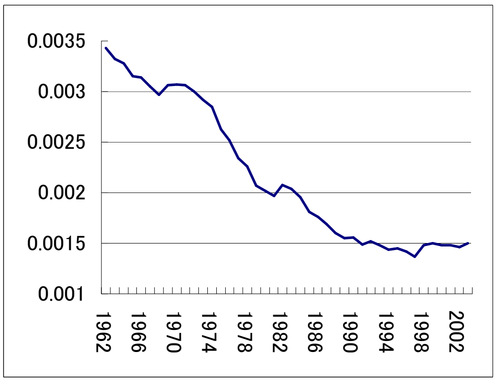
$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \qquad (2\text{-}3\text{-}10)$$

となる．ここに，ω は，スタート時点の年齢，$D_\omega(0)$ は，所与とし，$u_\omega(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(0,\sigma_\omega^2)$ に従うとした．
(2-3-10)は，離散時点の標本から求めたモデルであるが，$D_\omega(t)$ を各会計年度における死亡数ではなく連続時間の中のある経過 t 時点での直近過去 1 年間，すなわち経過期間[t-1, t]の死亡数とすることにより，予測死亡数 $D_\omega(t)$ の連続時間確率過程モデルを，幾何ブラウン運動過程

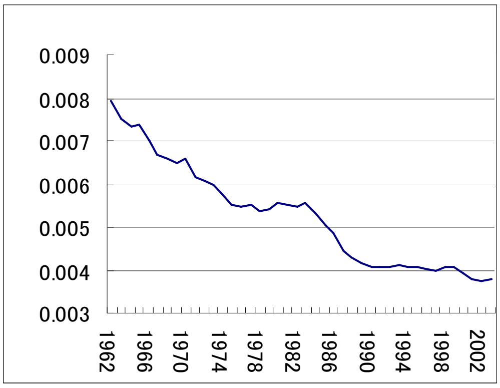
$$D_\omega(t) = D_\omega(0)\exp(y_\omega(t)) \qquad (2\text{-}3\text{-}11)$$

と仮定した．
ここで，$y_\omega(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(\mu_\omega t,\sigma_\omega^2 t)$ に従う．なお，例示の係数 μ_ω,σ_ω は，それぞれ(0.0721, 0.0226)であった．なお，$y_\omega(t)$ が正規分布に従うため，理論的には，死亡数の合計が 0 時点の生存数を超える問題が発生する．ただ，今回想定した証券化は，短期の定期保険であり，また，高年齢を対象としていないため，その問題が発生する確率は，極めて小さく無視できる範囲内と考える．
次に (2-3-11)式の係数 μ_ω,σ_ω について，出生年度間の関係を分析する．これは，なるべく直近までの死亡率の改善状況をこの係数に反映させるためである．具体的には出生年度別に μ_ω を $\ln D_\omega(t) - \ln_\omega D(t-1)$ の平均値として求め，時系列分析を試みた．しかしながら，[図

2-2],[図 2-3]のとおり，40 歳と 50 歳を例に見ると，概ね 10 年前を転換点として，それ以前は，減少トレンドがあったが，直近 10 年では，安定期に入っている．いわゆる「折れた状態」になっている可能性のためである．従って，通期では，正しい結果が得られないと判断した．また，最近 10 年の数値だけでは標本数が少ないため，単位根検定もできない．従って，最近 10 年間の状況を参考に μ_ω は，出生年度により改善は見られないとし，ω のみの係数（定数）とした．また，σ_ω^2 の出生年度との関係は，ホワイトの検定により，均一分散とした．以上により，予測死亡数 $D_\omega(t)$ の確率過程モデルが(2-3-11)式により定式化できた．なお，時系列分析は，山本[1999]，小暮[2000]，蓑谷[2001]を参照されたい．



［図 2-2］簡易生命表による 40 歳男子の死亡率推移表
(1962-2003)



［図 2-3］簡易生命表による 50 歳男子の死亡率推移表
(1962-2003)

2.4 死亡リスク債券の価格付け

この節では，死亡リスク債券の価格付けのモデルを導出する．具体的には，前章で求めた死亡数の連続時間確率過程モデルを用いて，死亡リスク債券の価格を決めるストップロス再保険の理論価格モデルを提案し,償還額を求める．死亡リスク債券が市場で評価されることを前提としているため，原資産である定期保険も市場に存在すると考える．

この原資産である定期保険は，$[t-1,t]$にて観測される死亡に対して死亡保険金を支払うものであり，通常生命保険会社で扱っている定期保険ではない．いわば,「単位保険となる定期保険」である．この保険の純保険料P_2^tを所与のものとし，エッシャー変換（確率測度 P から確率測度 Q へ）のパラメータ θ を(2-3-11)を用いて，次式が成立するように求める．

$$\begin{aligned} P_2^t &= e^{-rt}E^Q[Xd_\omega(t)] \\ &= e^{-rt}E^Q[Xd_\omega(0)\exp(Y(t)] \end{aligned} \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

すなわち，定期保険を，不確実性を支配する幾何ブラウン運動過程の関数として与えられるようなペイオフ$Xd_\omega(t)$を生み出す派生商品ととらえて,エッシャー変換によりリスク調整済確率測度を求める．さらに，定期保険を原資産とする派生商品としてストップロス再保険をとらえると,ストップロス再保険の理論価格π_2を計算することにつながるはずである．つまり時点nにおいて支払われるペイオフに対して

$$\pi_2 = e^{-rn}E^Q[S_2] \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

となる．簡単化のため，コストは無視し，定期保険契約集団については，中途の解約契約はないものとした．

まず，(2-3-11)のモデル式を用いる．このモデル式の係数$\mu'_\omega,\sigma'_\omega$は，実際の死亡リスクの移転対象となる契約集団より求めることとする．これにより，支払死亡保険金総額の確率過程（確率測度P）は，

$$Xd_\omega(t) = Xd_\omega(0)\exp(Y(t)) \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

となる．確率測度P上では$Y(t)$は，$N(\mu'_\omega t,\sigma'^2_\omega t)$に従う．また，$X$，$d_\omega(0)$は，所与とした．

確率測度PからQへの測度変換を，エッシャー変換により行うと，エッシャー測度変換式

$$dQ = \frac{e^{\theta Y(t)}}{E^P[e^{\theta Y(t)}]}dP \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

により，エッシャー変換分布のモーメント母関数は，

$$M(z,t\mid\theta)=\frac{E^P[e^{(z+\theta)Y(t)}]}{E^P[e^{\theta Y(t)}]}$$

$$=\exp\{(\mu_\omega^{'}+\sigma_\omega^{'2}\theta)tz+\frac{1}{2}\sigma_\omega^{'2}z^2t\} \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

となる．ここに，θ は，危険回避度にマイナスをつけたものである．従って，エッシャー変換による確率測度上では $Y(t)$ は，$N((\mu'_\omega+\sigma'^2_\omega\theta)t,\sigma'^2_\omega t)$ に従うこととなる．原資産として定期保険が資本市場で存在し，P_2^t が所与とすれば，θ が求まる．もし，完備市場取引であれば，マルチンゲール理論に従い，このドリフト項は，θ に無関係にリスクフリーレートと σ によって一意に決まるが，非完備市場取引のため，リスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を求める必要がある．現在の生命保険料を用いれば，リスク調整済確率測度への変換パラメーター θ は求まるはずである．つまり，生命保険のペイオフが，死亡数の実現値関数であることから，生命保険を死亡数の派生商品と考える．死亡数と生命保険のペイオフは同じリスク回避度を持つとして，現在の生命保険料からリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を求めることができる．なお，以下では，簡単化のため，コストは無視した．
具体的には，定期保険の純保険料から，死亡リスクに対応したリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を，期間を通じて一定と仮定して求めた．また，投資家は，生命保険会社に代わって，死亡リスクを負うため，リスクチャージを含む定期保険純保険料が，投資家の死亡リスクに対するリスク選好を反映した公正価格と仮定した．次に，リスク調整済確率測度変換パラメーターを導出する．まず，(2-4-1)式を簡便的な料率式に変形し，10 年定期保険の保険金 1 に対する一時払純保険料を $P^T(10)$ とすると，リスク調整済確率測度 Q のもとで，

$$P^T(10)=\frac{1}{l_\omega(0)}E^Q\ [\sum_{t=1}^{10}\ d_\omega(t)e^{-r(t-0.5)}] \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

が成り立つリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ が期間を通じて一定として求まる．なお，r は，連続複利リスクフリーレートとした．
次に，確率測度 Q のもとで，定期保険の派生資産であるストップロス再保険の理論価格 π_2 および，償還額 $\overline{B}$ を求める．ストップロス再保険の理論価格 π_2 は，ヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプション[3]の価格式により求める．従って，

[3] ヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプションとは，契約期間中における原資産価格の最大値が行使価格を超えた場合に満期時点でその超過額を得るオプション契約である．詳細は，藤田[2002],Gerber and Shiu[2003]を参照のこと．

死亡数が幾何ブラウン運動過程に従うとし,n 年間で会計年度ではなく，観測される連続的な時間 t 時点における過去 1 年間の死亡数から計算される死亡保険金支払額の最大値に対するストップロス再保険について，非完備市場におけるストップロス再保険料の理論価格 π_2 は,

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= e^{-rn}E^Q[S] \\
&= \frac{\overline{A}}{A_\beta - A_\alpha} e^{-rn}\{E^Q[\max(G-A_\alpha,0)] - E^Q[\max(G-A_\beta,0)]\} \\
&= \frac{\overline{A}}{A_\beta - A_\alpha}\Big[\ Xd_\omega(0)\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_\omega(0)}{A_\alpha} + (\mu^Q + \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&- A_\alpha e^{-\mu^Q n}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_\omega(0)}{A_\alpha} + (\mu^Q - \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&+ \frac{Xd_\omega(0)\sigma_\omega'^{\,2}}{2r}\Big(\ \Phi\Big(\frac{\ln(\frac{Xd_\omega(0)}{A_\alpha} + (\mu^Q + \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&- e^{-\mu^Q n}\Big(\frac{A_\alpha}{Xd_\omega(0)}\Big)^{\frac{2\mu^Q}{\sigma_x'^{\,2}}}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_\omega(0)}{A_\alpha} - (\mu^Q - \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big)\Big) \\
&- Xd_\omega(0)\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_\omega(0)}{\beta} + (\mu^Q + \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&+ A_\beta e^{-\mu^Q n}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_\omega(0)}{A_\beta} + (\mu^Q - \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&- \frac{Xd_\omega(0)\sigma_\omega'^{\,2}}{2r}\Big(\ \Phi\Big(\frac{\ln(\frac{Xd_\omega(0)}{A_\beta} + (\mu^Q + \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big) \\
&- e^{-\mu^Q n}\Big(\frac{A_\beta}{Xd_\omega(0)}\Big)^{\frac{2\mu^Q}{\sigma_\omega'^{\,2}}}\Phi\Big(\frac{\ln(\frac{X_\omega d(0)}{A_\beta} - (\mu^Q - \frac{1}{2}\sigma_\omega'^{\,2})n}{\sigma_\omega'\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big] \\
&\frac{e^{-rn}}{e^{-\mu^Q}}
\end{aligned}
\tag{2-4-7}
$$

として与えられる．ここに， μ^Q は， $\mu'_\omega+\sigma'^2_\omega\theta$ とする．また， Φ は，標準正規分布の分布関数を表す．これにより，死亡リスク債券の償還額 $\overline{B}$ は，(2-2-1)式に求まられた π_2 を代入す

ることで与えられる．

具体的に，(2-4-7)式により，ストップロス再保険の価格の試算値を以下に示す．前提は，残存保険期間 10 年男子の定期保険集団を証券化する．また，使用データは，１人当たりの死亡保険金 X を 1000 万円．$d_\omega(0)$ は，生保標準生命表 1996 男子粗死亡率による．定期保険の純保険料は，生保標準生命表 1996 男子死亡率（死亡用）と予定利率 1.5%による．無リスク金利 r は，1.5%．A_α は，$Xd_\omega(0)$ の 3 倍．A_β は，$Xd_\omega(0)$ の 5 倍とした．その結果の一人当たりストップロス再保険価格の試算値および対象契約の規模を示す σ'_ω による感応度は，表 2-4 のとおりである．定期保険を保有している生命保険会社がその契約量の規模から大数の法則が働かないために生じる死亡リスクをヘッジするためのストップロス再保険の価格は，この商品特性から，σ'_ω の変化に大きく影響する．つまり，契約量が小さければそれだけ σ'_ω が大きくなり，価格がその分増加することを表 2-4 は示している．したがって，実務に応用する際は，σ'_ω について，実際のデータに基づき十分な妥当性検証が必要である．

表 2-4．ストップロス再保険価格の試算値と感応度テスト

ω	35
σ'_ω	
2.70%	2,171
10%	3,543

ω	40
σ'_ω	
3.84%	3,396
10%	5,499

2.5 結論と今後の課題

生命保険の証券化は，生命保険会社の死亡リスクを死亡リスク債券として資本市場に移転するものである．従って，この債券は，今後，証券化が進むにつれて，資本市場がこの価格を形成し，理論価格に近づくことが予想される．この点を踏まえて，生命保険の証券化を研究した.

その結果,

(1) 証券化の対象を生命保険会社が保有する短期の定期保険契約とし，その商品の保有層を考慮して，ウエイトの高い成人層を対象とした．従って，この限定した年齢による時系列分析に基づき，死亡数の確率過程モデルを求めた結果，幾何ブラウン運動過程と見なした．これは，先行した研究の Milevesky and Promislow[2001]，Gaurilov and Gavriova[2001]および，Lee and Cater [1992]の確率過程モデルよりも簡単なモデルとなり，実務において有効なものとなった.

(2)つぎに，この死亡数の確率過程を用いて，非完備市場を前提に,エッシャー変換によりストップロス再保険の理論価格モデルをヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプションの価格式を用いて提案した.

今回は,被保険者年齢を特定し,また,保険期間も短期として,定期保険を対象とした死亡リスク債券について，研究した．しかし，生命保険会社は，幅広い年齢と終身保険など長期保険期間の生命保険も保有している．従って，これに対する死亡リスク債券の価格モデルは，今後の研究課題としたい.

第３章生命保険会社における生存リスクの証券化と共単調性の理論に基づくその価格付け

3.1 はじめに

生命保険に内在する死亡リスクおよび生存リスクは，将来において死亡生起が不確実であることにより存在する．このリスクを資本市場で取引する証券化が進んでいる．証券化は，リスク管理のため，リスクを外部に移転する１つの手段である．
死亡リスクの証券化については，2003 年 12 月に再保険会社である Swiss Re が初めて死亡リスク債券を発行した．その内容は，第２章で述べたとおりであり，Swiss Re は，自身のリスク管理のために，内在する死亡リスクを資本市場に移転する証券化を実施したものと解釈できる．
死亡リスク債券の１年後，2004 年 11 月に欧州投資銀行（ＥＩＢ）が長寿債券を発行した．BNP　PARIBAS[2005]によれば，内容は以下のとおりである．
(1) 発行額は，5.5 億ポンド．
(2) 期間は，25 年．(長寿リスクの一部を取り扱う債券となる)
(3) ペイオフは，毎年，一定額×生存率．
この生存率は，2003 年時 65 歳の英国国民男子生存人口に対するその後の実際生存率である．また，この債券は，クーポンが変動する債券である．英国の生命保険会社がこの債券を購入すると，自社が持つ生存リスクをヘッジすることができる．ただし，インデックス型の商品であるため，ベーシスリスクが存在する．
Swiss Re およびＥＩＢの証券化は，ともに，不確実な死亡生起によるリスクを証券化したものである．このように，除々にではあるが，死亡・生存リスクの証券化は，進んでいる．この証券化は，これらのリスクを保有している生命保険会社にとって，リスク管理の有効な手段である．
生命保険会社のポートフォリオが，もし，各年齢，性別において，同額の死亡リスクと生存リスクを保有すれば，相互にヘッジ機能が働き，リスクは相殺される．しかし，働き盛りの成人層は，死亡リスクを多く保有し，一方高年齢層では，逆に生存リスクを多く保有しているのが実態である．したがって，バランスが取れていない分，それぞれのリスクに対し，的確にリスクを管理しなければならない．このような状況下で，証券化は，生命保険会社のリスクを外部に移転するリスク管理手段の一つとして有効となる．
しかし，この価格付けに関しては，Swiss Re および EIB とも公表していない．そこで，本章では，生命保険会社が死亡生起にかかわるリスク管理のために，証券化モデルと価格付

けについて考察した．

死亡生起に係るリスクの証券化については，従来の生命保険の価格付けと異なり，リスク債券が資本市場で取引されることを前提に価格付けが行われなければならない．したがって，この価格付けは，従来の保険数理に加えて金融工学により行われることが合理的と考える．つまり，保険数理の保険料計算原理と金融工学の無裁定価格理論を統合した新たな価格付け理論の導出が必要になる．本章は，この証券化の価格付けを以上の理論を用いて考察するものである．

先行研究として，生存リスクの証券化を研究したのが，Lin and Cox[2005b]である．その内容は,第 2 章で述べたとおりであり,死亡率の分布関数とリスクの市場価格(Market Price of Risk)を用いて，ワン変換によるストップロス再保険の理論価格モデルを提案した．資本市場に放出することを前提とした価格理論を導入している．

これらに対し，本章は，第 2 章で述べた価格付けプロセスを踏襲し，生命年金保険に内在する生存リスクの証券化モデルとその理論価格モデルを提案した．

証券化モデルの契約形態は，生命保険会社と SPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約を締結し，同時に SPC は，投資家に対し，生存リスク債券を発行するものである．

また，生存リスク債券は，将来の一定年齢時点の生存数による純粋生存保険の保険金支払総額が一定以上となれば債券の償還額が減少するゼロクーポン債券とした．各年度の年金に対しては，このリスク債券の組み合わせにより，リスクヘッジが可能となるのである．

まず，生命保険会社の将来の保険金支払額が不確実であることに前提に置くため，死亡生起の確率過程を特定する必要がある．

本章では，高年齢層について，第 2 章と同様に簡易生命表を用いてコーホートの時系列分析を行い，死亡数の確率過程モデルを求めた．この結果，時系列分析による死亡数の確率過程モデルは，高年齢層についても幾何ブラウン運動過程となった．

次に，生存リスク債券の価格付けのモデルを提案した．具体的には，先に求めた死亡数の確率過程モデルを用いて，非完備市場を前提に現在の生命保険会社が採用している生命年金保険の純保険料により，エッシャー変換によるリスク調整済確率測度 Q を導出する．確率測度 Q のもとで，一定以上の生存保険金支払が発生した時におけるストップロス再保険の理論価格モデルを提案し,償還額を求めたものである． このストップロス再保険の価格モデルは，期始の生存数（所与）と対数正規分布に従う確率変数としての死亡数の和により求まるため，解析的に表現できない．そこで，共単調性という多変量リスク評価のための理論を用いてストップロス再保険の上限と下限の価格について解析的な評価を行った．共単調の理論は，従属的な確率変数の和を取り扱った理論である．小暮[2005]によれば，共単調の理論を用いると，従属性を明示的にモデル化することなく，個別リスクの総和に対する有用な上限と下限を求めることが出来る．実際に Dhaene et al[2002b]は，Comonotinic Bound としてアジアンオプションの上限と下限の価格の評価を行った．本章では，この理論を参考に非完備市場におけるストップロス再保険の上限と下限の価格モデ

ルを提案した．

本章は，以下のような構成になっている．2 節では，本研究の生命保険の証券化モデルを示す．また，3 節では，死亡数の確率過程を示し，4 節では，生存リスク債券の価格モデルを示した．さらに，5 節で，価格モデル式を用いてストップロス再保険価格の試算値を求め，最後に 6 節で，本研究の結論について述べることとした．

3.2. 生命保険の証券化モデル

この節では，生命年金保険の証券化モデルの説明を行う．本節の生命年金保険の証券化モデルは，生命保険会社が保有する個人年金保険の年金開始契約を証券化の対象とし，期間中の年金支払額が一定以上となるリスクを資本市場に移転するものである．また，証券化の契約形態は，生命保険会社と SPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約（再保険金 S_2，保険料一時払 π_2）を締結し，同時に SPC は，投資家に対し，生存リスク債券を発行する．また，投資家から集まった資金（投資額，所与とする）$\overline{A}$ と再保険料 π_2 は，安全資産（無リスク資産）へ投資することとした．

次に，生存リスク債券の仕組みは，以下のとおりと仮定した．

(1) ゼロクーポン債.

(2) 債券の期間は，純粋生存保険の保険期間 n 年と同一.

(3) 生存リスクは，債券の償還総額 $\overline{B}$ に反映する．

年度単位の不確実な年金支払を個別に証券化し，償還額にリスクを反映させるゼロクーポン債としたことにより，多様な組み合わせを可能とした．

償還額 $\overline{B}$ は，投資額 $\overline{A}$ と再保険料 π_2 を償還期まで，安全資産に投資した元利合計から，再保険金 S_2 を減じたものとする．式で表すと，

$$\overline{B} = (\overline{A} + \pi_2)e^{rn} - S_2 \tag{3-2-1}$$

である．ここに，r を無リスク年率金利とする．

再保険金 S_2 は，以下のように仮定した．

条件 1 ： $l_\omega(n)X \le A_\alpha$ 　　このとき　$S_2 = 0$，

条件 2 ： $A_\alpha < l_\omega(n)X \le A_\beta$ 　　このとき　$S_2 = \overline{A}(\dfrac{l_\omega(n)X - A_\alpha}{A_\beta - A_\alpha})$，

条件 3 ：$l_\omega(n)X > A_\beta$　　　　このとき　$S_2 = \overline{A}$

ここに，

（1） ωを債券発行時の被保険者年齢とする．

（2） Xを一人当たりの生存保険金とし，その支払は，期末払とする．

（3） $l_\omega(0)$を証券発行時点の生存数（実績：所与）とする．

（4） $l_\omega(n)$をn年後の生存数とする．

（5） $Xl_\omega(n)$を償還時点の保険金支払総額とする．

（6） A_αをエクセス・ポイントとする．

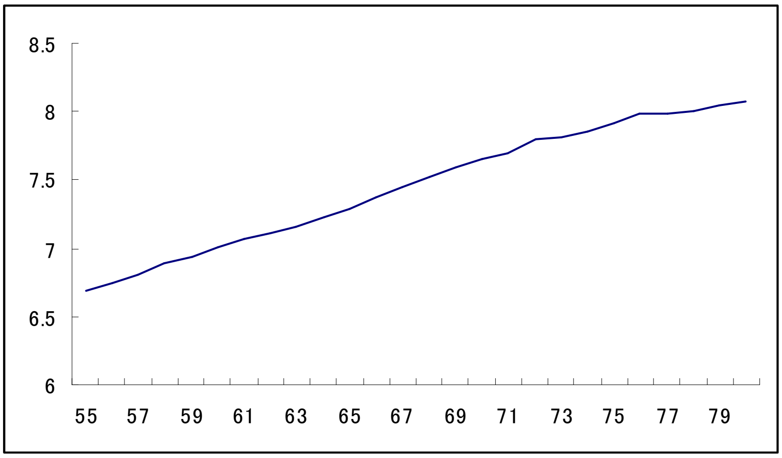
（7） $A_\beta - A_\alpha$をカバー額とする．

保険金支払総額$Xl_\omega(n)$が一定以上であれば，償還額が減少し，一方，一定未満であれば，無リスク債券より高い利回りが得られるゼロクーポン債券である．これによって生命保険会社が保有する個人年金保険に関する生存リスクを資本市場に移転することができるのである．

以下，すべての不確実性は，フィルトレーション$\{F_t : 0 \le t \le n\}$を備わった確率空間(Ω, F, P)により表現する．さらに，経過tまでの情報は，F_tにより与え，また，F_tを条件とする確率測度Pの条件付期待値を$E\ [\cdot]$と表すことにする．これらの条件に基づき，死亡数の確率過程モデルの定式化を行い，さらに，生存リスク債券の価格を決めるストップロス再保険の価格が求めることにした．

3.3 死亡数の確率過程

この節では，死亡数の確率過程モデルを提案する．簡易生命表に基づき，まず，2003 年度の男子 80 歳の死亡率を基準に同時出生の過去の死亡率について対数死亡率$\ln q_x$(ここに，xは，年齢)をグラフで示すと，[図 3-1]のとおり直線に近い．もし，直線とみなせれば，死亡数の対数差の確率過程モデルがランダムウォ-クになる可能性がある．



［図 3-1］ $\ln q_x$

高年齢層を対象とし時系列分析に基づき，死亡数の確率過程モデルを求める．具体的には，時系列分析の標本を，簡易生命表とし，2003 年度の男子 80 歳の死亡率を基準に同時出生の過去の死亡率について 55 歳まで遡り，55 歳から 80 歳までの死亡率とした．この標本をもとに， 55 歳 (ω) を時系列分析のスタート時点の年齢とし，その期始の同時出生生存数に対して，その後の経過 t 年度の死亡数 $[D_\omega(t), t = 0 \sim 25]$ を求め，この死亡数 $D_\omega(t)$ により時系列分析を行った．その結果，死亡数 $D_\omega(t)$ の対数が，趨勢のあるランダムウォークに従うことがわかり簡単なモデルとなった．詳細は，以下のとおりである．

3.3.1　モデルの同定

$\ln D_\omega(t)$ を説明するために，自分自身の過去を説明変数とする回帰モデル

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + \phi_2 \ln D_\omega(t-2)$$
$$+\phi_3 \ln D_\omega(t-3) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \phi_f \ln D_\omega(t-f) + u_\omega(t) \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

を $AR(f)$ と記す．ここで，ϕ_i と μ_ω はパラメータである．この次数 f を $SBIC$ によって決める．具体的には, 推定式の誤差を表した $SBIC$ が最小となる次数を採択するのである. この結果, 表 3-1 のとおり $AR(1)$ が最小のため，次数 1 を採択した．

表 3-1. 同定

	μ_ω	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$SBIC$
$AR(1)$	0.2084	0.9794			-7.6016
$AR(2)$	0.2554	0.9092	0.0645		-7.4961
$AR(3)$	0.2773	0.8892	0.0398	0.0423	-7.3160

したがって，モデルは，

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \tag{3-3-2}$$

となった．次に，もし，$\phi_1 = 1$ であれば，

$$\ln D_x(t) = \mu_x + \ln D_x(t-1) + u_x(t) \tag{3-3-3}$$

となり，趨勢をもつランダムウォークモデルの可能性がある．したがって，$\phi_1 = 1$ の検定，すなわち，単位根検定を行う．

3.3.2　単位根検定

検定方法は，F 値タイプの検定である．具体的には，

帰無仮説　$\ln D_x(t) = \mu_x + \ln D_x(t-1) + u_x(t)$

対立仮説　$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \beta_1' t + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$

として，検定を行った結果，表 3-2 のとおり両側有意水準 5%で帰無仮説は，棄却されなかった．

表 3-2. 単位根検定　F 値タイプのテスト

F 値統計量	臨界値 5%水準	臨界値 95%水準
1.90	1.08	7.24

したがって，このモデルは，(3-3-3)式になった．次に，(3-3-3)による推定結果との残差を算出し，このモデルが正しいかどうかの診断を行う．

3.3.3　モデルの診断

モデルの診断は，まず，残差系列を求め，その残差系列を用いて，系列的に独立か否かの統計的検定を行うものである．もし，このモデルが正しければ，残差系列は独立のはずである．検定方法は，$Ljung-Box$ 検定である．具体的には，

帰無仮説　ラグ 5 までの残差系列が独立

対立仮説　ラグ 5 までの残差系列のなかで少なくとも 1 つは従属

として，検定を行った結果，表 3-3 のとおり，帰無仮説は，有意水準 5%で棄却されなかった．

表 3-3．残差自己相関の検定

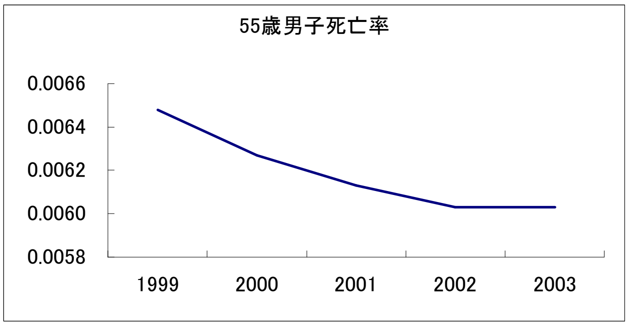
$Ljung-Box$ 統計量	臨界値 5%水準
3.13	11.07

診断の結果，(3-3-3)のモデルを採択した． (3-3-3)は，離散時点の標本から求めたモデルであるが，$D_\omega(t)$ を各会計年度における死亡数ではなく連続時間の中のある経過 t 時点での直近過去 1 年間，すなわち経過期間[t-1, t]の死亡数とすることにより，予測死亡数 $D_\omega(t)$ の連続時間過程モデルを，幾何ブラウン運動過程

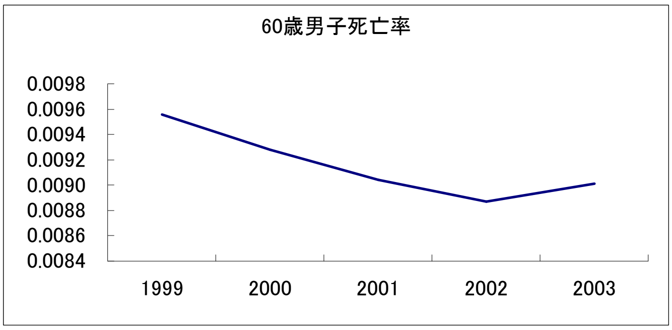
$$D_\omega(t) = D_\omega(0)\exp(y_\omega(t)) \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

と仮定した．ここで，$y_\omega(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(\mu_\omega t, \sigma_\omega^2 t)$ に従う．例示の係数 $\mu_\omega, \sigma_\omega$ は，それぞれ(0.0556, 0.0232)であった．なお，$y_\omega(t)$ が正規分布に従うため，理論的には，死亡数の合計が 0 時点の生存数を越える問題が発生する．ただ，今回想定した年齢を 55 歳から 80 歳までに限定したため，その確率は無視できる範囲と考える．

次に (3-3-4)式の係数 μ_ω について，出生年度との関係に改善傾向があるかどうかみると，将来予測の参考になる 55 歳および 60 歳の最近の死亡率について，［図 3-2］,［図 3-3］のとおり，改善傾向に変化(線が折れた状態) が見られる．従って，μ_ω は，出生年度に無関係とし，ω のみの係数（定数）と仮定した．また，σ_ω^2 の出生年度との関係は，ホワイトテストの結果から均一分散と仮定した．以上により，予測死亡数 $D_\omega(t)$ の確率過程モデルを(3-3-4)式により仮定する．なお，時系列分析は，山本　拓[1999]，小暮　厚之[2000]，蓑谷　千凰彦[2001]を参照されたい．



［図 3-2］簡易生命表による 55 歳男子の死亡率推移表



［図 3-3］簡易生命表による 60 歳男子の死亡率推移表

3.4 生存リスク債券の価格付け

この章では，生存リスク債券の価格付けモデルを提案した．具体的には，前節で求めた死亡数の確率過程モデルを用いて，非完備市場を前提に現在の生命保険会社の生命年金保険料に基づき，確率測度Qを導出する．次に，純粋生存保険を派生資産とみなして，確率測度Qのもとで,一定以上の生存保険金支払に対するストップロス再保険の理論価格モデルを提案し,償還額を求める．なお，ここでは，簡単化のため，コストは無視した．

まず，(3-3-4)のモデル式を用いる．このモデル式の係数$\mu'_\omega, \sigma'_\omega$は，実際の生存リスクの移転対象となる契約集団より求めることとする．これにより，まず，死亡数の確率過程（確率測度P）は，

$$d_\omega(t) = d_\omega(0)\exp(Y(t)) \tag{3-4-1}$$

となる．確率測度P上では$Y(t)$は，$N(\mu'_\omega t, \sigma'^2_\omega t)$に従う．また，$d_\omega(0)$は，所与とした．確率測度$P$から$Q$への測度変換を，エッシャー変換により行うと，エッシャー測度変換式

$$dQ = \frac{e^{\theta Y(t)}}{E\ [e^{\theta Y(t)}]} dP \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

により，エッシャー変換分布のモーメント母関数は，

$$M(z,t \mid \theta) = \frac{E[e^{(z+\theta)Y(t)}]}{E[e^{\theta Y(t)}]}$$

$$= \exp\{(\mu'_{\omega} + \sigma'^{2}_{\omega}\theta)tz + \frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega}z^{2}t\} \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

となる．ここに，θ は，危険回避度にマイナスをつけたものである．従って，エッシャー変換による確率測度上では $Y(t)$ は，$N((\mu'_{\omega}+\sigma'^{2}_{\omega}\theta(t))t, \sigma'^{2}_{\omega}t)$ に従うこととなる．

非完備市場を前提に現在の生命保険会社の生命年金保険料純保険料が所与とすれば，θ が求まる．もし，完備市場取引であれば，マルチンゲール理論に従い，このドリフト項は，θ に無関係にリスクフリーレートと σ によって一意に決まるが，非完備市場取引のため，リスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を求める必要がある．

投資家が生命保険会社の代わりに生存リスクを負うことから，リスクマージンを含む現在の生命保険料を用いれば，リスク調整済確率測度への変換パラメーター θ は求まるはずである．つまり，生命保険のペイオフが，死亡数の実現値関数であることから，生命保険を死亡数の派生商品と考える．死亡数と生命保険のペイオフは同じリスク回避度を持つとして，現在の生命保険料からリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を求めることができる．なお，以下では，簡単化のため，コストは無視した．

具体的には，生命年金保険の純保険料から，生存リスクに対応したリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ を，期間を通じて一定と仮定して求めた．

次に，リスク調整済確率測度変換パラメーター θ を導出する．25 年生命年金保険の年金額 1 に対する一時払純保険料を $P^{a}(10)$ とすると，リスク調整済確率測度 Q のもとで，次式のもとで，リスク調整済確率測度への変換パラメーター θ が期間を通じて一定として求まる．

$$\begin{aligned} P^{a}(25) = E^{Q}[\frac{1}{l_{\omega}\ (0)}\{ & l_{\omega}(0) + (l_{\omega}(0) - d_{\omega}(1))e^{-r}) \\ & + (l_{\omega}(0) - \sum_{k=1}^{2} d_{\omega}(k))e^{-r2})\ + ,\quad , \\ & + (l_{\omega}(0) - \sum_{k=1}^{24}\ d_{\omega}(k))e^{-r9})\}] \\ = E^{Q}\ [1 + \sum_{t=1}^{24}(1 - & \frac{1}{l_{\omega}\ (0)}\sum_{k=1}^{t}\ d_{\omega}(k))e^{-rt}] \end{aligned} \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

つまり，$P^{a}(25)$ は，毎期始に生存率に年金額 1 を乗じた額が支払われ，その毎期の支払額の期待現在価値と等価となるはずである．(3-4-4) 式によりリスク調整済確率測度への変換パラメーター θ が期間を通じて一定として求まる．確率測度 Q のもとで，n 年満期純粋生存保険の理論価格 $O_{\omega}(n)$ は，

$$O_{\omega}(n)=e^{-rn}E^{Q}[Xl_{\omega}(0)-\sum_{k=1}^{n}Xd_{\omega}(k)] \tag{3-4-5}$$

となる．さらにストップロス再保険の理論価格 $\pi_{\omega}(n)$ および，償還額 $\overline{B}$ を求める．まず，死亡数が幾何ブラウン運動過程に従うとし，純粋生存保険金のストップロス再保険の理論価格 $\pi_{\omega}(n)$ は，

$$\begin{aligned}\pi_{\omega}(n)&=e^{-rn}E^{Q}[\max(Xl_{\omega}(0)-\sum_{k=1}^{n}Xd_{\omega}(k)-A_{\alpha},0]\\&-e^{-rn}E^{Q}[\max(Xl_{\omega}(0)-\sum_{k=1}^{n}Xd_{\omega}(k)-A_{\beta},0]\end{aligned} \tag{3-4-6}$$

となる．さらに，

$$\frac{1}{n}(Xl_{\omega}(0)-A_{\alpha})=A_{K_1},$$

$$\frac{1}{n}(Xl_{\omega}(0)-A_{\beta})=A_{K_2},$$

と置くと，

$$\pi_{\omega}(n)=ne^{-rn}E^{Q}[\max(A_{K_1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Xd_{\omega}(k),0]$$

$$-ne^{-rn}E^{Q}[\max(\mathrm{A}_{\mathrm{K}_2}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Xd_{\omega}(k),0] \tag{3-4-7}$$

となりアジアンプットオプションの価格式となる．したがって，このストップロス再保険の価格は，幾何ブラウン運動に従う定期保険のペイオフの算術平均を表すアジアンプットオプションの価格式より求まる．しかし，この価格式は，相互に従属な対数正規分布に従う確率変数の和により求まるため，解析的に求めることはできない．

そこで，共単調性という多変量リスク評価のための新たな理論を用いて解析的な評価を行った．共単調性の理論は，従属的な確率変数の和を取り扱った理論である．共単調性の理論を用いると，従属性を明示的にモデル化することなく，個別リスクの総和に対する有用な上限と下限を求めることが出来る．この理論を用いて，Dhaene et al[2002b]は，アジアンオプションの価格を導出した．これを参考にストップロス再保険の価格の範囲を求めた．具体的には以下のとおりである．

まず，(3-4-7)式の右辺第一項の上限価格を $PU_{\omega}(n, \mathrm{A}_{K_1})$ とすると，

$$PU_{\omega}(n, A_{K_1}) = CallU_{w}(n, A_{K_1}) + A_{K_1}e^{-rn} - E^{Q}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xd_{\omega}(i)]e^{-rn} \tag{3-4-8}$$

と表せる．
ここに，

$$CallU_{\omega}(n, A_{K_1}) = n\{\frac{Xd_{\omega}(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu^{Q}n}\Phi(\sigma\sqrt{n-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{C}}(nA_{K_1})))$$

$$-e^{-\mu^{Q}n}(1 - F_{S^{C}}(nA_{K_1}))\}e^{-rn}/e^{-\mu^{Q}n}$$

とする．なお， $F_{S^{C}}(nA_{K_{11}})$ は，次式より求まる．

$$Xd_{\omega}(0)\sum_{i=0}^{n-1} \exp[(\mu^{Q} - \frac{\sigma^2}{2})(n-i) + \sigma\sqrt{n-i}\Phi^{-1}(F_{S^{C}}(nA_{K_1})] = nA_{K_1} \tag{3-4-9}$$

ここに， $\mu^{Q} = \mu'_{\omega} + \sigma'^{2}_{\omega}\theta(t)$ とする．

同様に，(3-4-7)右辺第一項の下限価格を $PL_{\omega}(n, A_{K_1})$ とすると，

$$PL_{\omega}(n, A_{K_1}) = CallL_{w}(n, A_{K_1}) + A_{K_1}e^{-rn} - E^{Q}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xd_{\omega}(i)]e^{-rn} \tag{3-4-10}$$

ここに，

$$CallL_{\omega}(n, A_{K_1}) = n\{\frac{Xd_{\omega}(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu^{Q}n}\Phi(\sigma r_{n-i}\sqrt{n-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nA_{K_1})))$$

$$-e^{-\mu^{Q}n}(1 - F_{S^{l}}(nA_{K_1}))\}e^{-rn}/e^{-\mu^{Q}n}$$

と表せる．なお， $F_{S^{l}}(nA_{K_1})$ は，次式より求まる．

$$Xd_{\omega}(0)\sum_{i=0}^{n-1} \exp[(\mu^{Q} - \frac{\sigma^2}{2}r_{n-i})(n-i) + \sigma r_{n-i}\sqrt{n-i}\Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nA_{K_1})] = nA_{K_1} \tag{3-4-11}$$

ここに,

$$r_{n-i}=\frac{n(n-i)-\dfrac{(n-i-1)(n-i)}{2}}{\sqrt{n^2n-\dfrac{n}{6}(n-1)(4n+1)}\sqrt{n-i}} \tag{3-4-12}$$

となる. 同様に(3-4-7)右辺第二項についても(3-4-8)と(3-4-10)の A_{K_1} を A_{K_2} に置き換えれば求まる. したがって, ストップロス再保険の上限価格 $\pi_\omega^U(n)$ は,

$$\pi_\omega^U(n)=\{PU_\omega(n,A_{K_1})-PL_\omega(n,A_{K_2})\} \tag{3-4-13}$$

となり, 同様に下限価格 $\pi_\omega^L(n)$ は,

$$\pi_\omega^L(n)=\{PL_\omega(n,A_{K_1})-PU_\omega(n,A_{K_2})\} \tag{3-4-14}$$

となる. リスク移転者側である生命保険会社は, リスクを保守的に評価するため(3-2-1)式の π_3 を $\pi_3^U(n)$ に置き換えて生存リスク債券の価格付けを行うことが考えられる. なお, 共単調理論によるアジアンオプション価格の上限と下限の評価については, 小暮[2005], Dhaene et al[2002a], Dhaene et al[2002b]を参照されたい.

3.5 数値例

ストップロス再保険の一人当たりの価格の試算値を示す. 試算のための前提内容は, 以下のとおりである.

(1) 債券発行時の被保険者年齢は, 55 歳（男子）.
(2) 純粋生存保険の満期 n は, 25 年.
(3) 無リスク金利 r は, 1.5%.
(4) X を 1.
(5) $d_\omega(0)$ は, 簡易生命表男子死亡率（2003 年時点で 80 歳の死亡率を基準に過去10 年間の同時出生死亡率）の 60%より求め, $d_\omega(0)=445$ とした.
(6) 生命年金保険料は, 生保標準生命表 1996 男子死亡率（年金開始用）, 予定利率は, 1.5%とした.
(7) A_{K_1} を $Xd_\omega(0)*3$ 水準値.
(8 A_{K_2} を $Xd_\omega(0)*4$ 水準値.
(9) σ は, 証券化対象の契約規模により異なるため, 表 3-4 のとおりとした.

表 3-4 ボラティリティー

σ
0.1
0.3

以上の計算前提による一人当たりのストップロス再保険価格の試算結果は, 表 3-5, 表 3-6 のとおりとなった.

表 3-5 $PU_{55}(n, A_K)$ $PL_{55}(n, A_K)$

n	σ	$PU_{55}(n, A_{K_1})$	$PL_{55}(n, A_{K_1})$	レンジ	$PU_{55}(n, A_{K_2})$	$PL_{55}(n, A_{K_2})$	レンジ
25	0.1	345	332	13	129	114	15
	0.3	594	564	30	371	332	39

表 3-5 の $PU_{55}(n, A_{K_1})$ $PL_{55}(n, A_{K_1})$ は, σ の影響が大きい.

表 3-6 一人当たりのストップロス再保険の価格

n	σ	$\pi_{55}^{U} / l_{\omega}(0)$	$\pi_{55}^{L} / l_{\omega}(0)$
25	0.1	0.00232	0.00204
	0.3	0.00263	0.00194

3.6 結論

生存リスクの証券化は, 生命保険会社が保有する生存リスクを生存リスク債券として資本市場に移転するものである. 従って, 証券化は, リスク管理上, 有効な 1 つの手段である. この点を踏まえて, 生存リスクの証券化を研究した.

その結果,

(1) 証券化の対象を生命保険会社において，生存リスクの保有率の高い 55 歳から 80 歳までの高齢者層とし，まず，死亡数の確率過程モデルを簡易生命表によるコーホートの時系列分析に基づき求めた．その結果，趨勢のあるランダムウォークと見なした．小島[2005a]では，35 歳から 60 歳までについても同様であることから，本章と合わせると，35 歳から 80 歳までについて，趨勢のあるランダムウォークを仮定することが可能であることが示された．これは，今後の生命保険の証券化に関する実務的な研究にとって，有意義なものと考える．

(2)つぎに，この死亡数の確率過程を用いて，生存リスク債券の価格付けを行った．この債券に内在する生存保険のストップロス再保険の価格式は，期始の生存数（所与）と対数正規分布に従う確率変数としての死亡数の和により求まるため，解析的に表現できない．そこで，共単調性という多変量リスク評価のための理論を用いて非完備市場におけるストップロス再保険の上限と下限について解析的な評価を行った．共単調性の理論は，今後，金融と生命保険との融合商品に関するプライシングとリスク管理に関する実務的な研究にとって，有意義なものと考える．

以上，生命保険の証券化については，今後，生命保険の証券化が進み，投資家の理解が深まれば，証券市場が拡大し，それにつれて，証券化とその価格付け理論の研究がますます進むことを期待する．

第４章生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル

4.1 はじめに

本章は，生命保険のリスク管理手段の１つとして期待できる死亡リスク・スワップ取引を考察する．具体的には，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社（X 社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社（Y 社）との間で，ペイオフを発生させ，期中の死亡率の変動による損失を相互に補う死亡リスク・スワップ取引を扱った．これは，2001 年 6 月に東京ガスと東京電力が行った天候デリバティブを交換する気温リスク・スワップ取引を参考にしたものである．死亡リスク・スワップ取引の価格付けは，取引対象となる２つの異なる被保険者集団に内在する死亡リスクと生存リスクをコールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，そのオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行うこととした．そのオプションの価格は，非完備市場におけるリスク調整済確率測度上のペイオフを無リスク金利で割り引いた現在期待価格として求めた．

先行したリスク・スワップ取引には，気温リスク・スワップ取引がある．2001 年 6 月に気温の低下により減収となる東京電力と逆に，上昇により減収となる東京ガスの間で，気温のリスク・スワップ取引が行われた．相互に減収を補う取引であった．刈屋 et al[2004] ，西田[2004]によれば，2001 年 8 月・9 月 2 ヶ月の平均気温が，26 度を基準に 0.5 度を越えて上下すると，取引期間満了時点でペイオフが発生し，0.1 度につき 4,880 万円を，上昇の場合は，東京電力が東京ガスに支払う．低下した場合は，東京ガスが東京電力に支払う取引であった．この取引の価格付けは，夏の平均気温の正反対の変動による収益変動リスクをコールオプションとプットオプションのペイオフ構造として識別し，2 つのオプションプレミアムが等価になるように契約条件（権利行使価格）を設定することで行われた．

本論文は，気温のリスク・スワップ取引を参考に死亡リスク・スワップ取引とその価格付けを考察した．リスクの軽減を図るため，社外へのリスク移転を考慮しなければならない場合に，再保険や死亡リスクの証券化[4]があるが，コストの問題が残る．死亡リスク・スワップ取引は，この問題を解消したリスク管理手段である．今後，リスク管理の重要性が増す中で，死亡リスク・スワップ取引は，生命保険会社のリスク管理の有力な手段となることが期待できる．

参考となる先行研究に Lin and Cox[2005a]と Cairns et al[2006]がある．ともに死亡リスクに関して，非完備市場におけるリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めたモデルである．

---

[4]生命保険の証券化の研究については，Lin and Cox[2005b]と小島[2005a]を参照されたい．

Lin and Cox[2005a]は，35 歳加入の死亡保険契約集団と 65 歳加入の即時払終身年金の契約集団の 10 年間のペイオフを交換するスワップの価格付けモデルを提案した．その価格付けは，各リスク調整済確率測度上におけるペイオフの期待現在価格が等価となる契約条件を設定することにより行われた．また，このリスク調整済確率測度は，ワン変換を用い，リスク調整済確率測度への変換パラメーターは，期間を通じて一定として米国の保険市場における保険料，および，それぞれの実測死亡率の累積分布関数により求めた．

さらに，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを保険市場ではなく，資本市場から求めたのが Cairns et al[2006]である．Cairns et al[2006]は，2004 年 11 月にＥＩＢ(欧州投資銀行)が発行した長寿リスク債の価格によりリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた．具体的には，長寿リスク債のイールドスプレッドが 20 ベーシスポイントであることに基づき，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを期間を通じて一定として求めた．

以上の先行研究を参考に本論文は，死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデルを提案した．

死亡リスク・スワップ取引のモデルは，市場参加者を生命保険会社とし，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる定期保険を販売する生命保険会社（X 社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命年金保険を販売する生命保険会社（Y 社）との間で， ペイオフを発生させ，期中の死亡率の変動による損失を相互に補う取引とした．具体的には，同一到達年齢の 2 つの被保険者集団を対象に，以降一定期間について，X 社の被保険者集団に係る死亡数が一定人数を超えた場合に超えた人数に対し 1 人当たり約定金額（H とする）を満了時点で，X 社が Y 社から得る．一方，X 社と取引時点で同数の被保険者数を対象とする Y 社の被保険者集団に係る死亡数が一定人数を下回った場合に下回った人数に対し 1 人当たり H を Y 社が X 社から得る取引とした．取引対象となる X 社の被保険者集団と Y 社の被保険者集団は，保険加入ニーズの違いから異質集団と仮定する．また，X 社の被保険者集団にかかわるペイオフは，X 社の死亡数を原資産とするコールオプションのペイオフとみなし，一方，Y 社の被保険者集団にかかわるペイオフは，Y 社の死亡数を原資産とするプットオプションのペイオフとみなす．つまり，X 社の死亡数と Y 社の死亡数は，オプション理論における 2 つの異なる原資産とする．この死亡リスク・スワップの価格付けは，それぞれのコールオプションの価格とプットオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行うこととした．原資産となる死亡数は，確率変動するため，確率過程に従う．そこで，同時出生の 25 年分の簡易生命表を用いて時系列分析により確率過程の数式化を行い，確率過程のパラメーターは，X 社，Y 社の経験値を用いて求めるものとした．さらに，コールオプション価格とプットオプション価格は，それぞれのペイオフを無リスク金利で割り引いた非完備市場におけるエッシャー変換による現在期待価格として求めた．したがって，それぞれの実確率測度上の死亡数の確率過程をリスク調整済確率測度上の確率過程に変換する必要がある．この変換手法は，非完備市場取

引を前提にGerber and Shiu[1994]のエッシャー変換理論に基づき，Lin and Cox[2005a]とCairns et al[2006]を参考にリスク調整済確確率測度パラメーターを求めることにより行った．このリスク調整済確率測度への変換パラメーターは，期間を通じて一定と仮定して，定期保険と生命年金保険のそれぞれの代表的な基礎率に基づく生命純保険料から求めた．最後に，それぞれのリスク調整済確率測度のもとで，コールオプションプレミアムとプットオプションプレミアムを求め，各々の価格が等しくなる契約条件（権利行使価格：支払条件となる死亡数の境界値）の設定方法を提案した．

本章は，以下のような構成になっている．2節で死亡リスク・スワップ取引の価格付けに関する先行研究を紹介する．3節では，本研究の死亡リスク・スワップの取引モデルを示す．また，4節では，死亡数の確率過程を特定し，5節では，死亡リスク・スワップ取引の価格付けモデルを示した．さらに，6節で，死亡リスク・スワップ取引の契約条件を試算し，最後に7節で，本研究の結論について述べることとした．

4.2 死亡リスク・スワップ取引の価格付けに参考となる先行研究

この章では，生命保険の死亡リスク・スワップ取引の価格付けに関して注目すべき先行研究を紹介する．

保険市場での市場価格をもとに死亡リスクと生存リスクのスワップ取引の価格付けを扱ったのが，Lin and Cox(2005a)である．

4.2.1 Lin and Cox[2005a]のモデル

Lin and Cox[2005a]は，生命保険会社間で死亡リスクと生存リスクを交換するスワップ取引とその価格付けモデルを提案した．

スワップ取引のモデルは,65歳加入の即時払終身年金契約集団と35歳加入の死亡保険契約集団の10年間のペイオフを交換するものである．また，その価格付けは，それぞれのペイオフのリスク調整済確率測度上での期待現在価格を計算し,おのおのの価格が等しくなるように契約条件を設定することにより行われる．

具体的には,実確率測度 P^a 上の死亡率の累積分布関数を $F_a(k)={}_kq_{65}^a$ とする.なお，${}_kq_{65}^a$ は，65歳の生存人口が k 年後までに死亡する確率を表す．これは，1996IAM2000　Basic Tableより求めた． $F_a(k)$ をワン変換 [5]によりリスク調整済確率測度 Q^a 上での死亡率の累積分布関数 $F_a^{Q^a}(k)$ に変換すると

[5] ワン変換については，*Wang*[1995,2000]を参照されたい．

$$F_a^{Q^a}(k) = \Phi[\Phi^{-1}(F_a(k)) - \lambda_a]$$

となる．ここに，λ_a は，リスク調整済確率測度 Q^a への変換パラメーター（生存リスクの市場価格）で，$\Phi(\cdot)$ は，標準正規分布の累積分布関数である．また，$F_a^{Q^a}(k) = {}_k q_x^{Q^a}$ と置くと，生存確率 ${}_k p_{65}^{Q^a}$ は，

$${}_k p_{65}^{Q^a} = 1 - {}_k q_{65}^{Q^a}$$

となる．リスク調整済確率測度への変換パラメーター λ_a を求めるために，保険市場の終身年金保険の価格 $\ddot{a}_{65}$ を用いると，この λ_a は，期間を通じて一定として

$$\ddot{a}_{65} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{65}^{Q^a}$$

の等式が成り立つことから定まる．ここで，$\ddot{a}_{65}$ は，Best’s Review(1996) で公表された民間生命保険会社の即時終身年金の価格を用いた．また，割引率 v は，US Treasury を用いた．以上の結果，求められた λ_a に基づき即時払終身年金契約集団の 10 年間のペイオフのリスク調整済確率測度 Q^a 上の期待現在価格 π_L^a は，

$$\pi_L^a = bN \sum_{k=0}^{9} v^{k+1} {}_{k+1} p_{65}^{Q^a} \tag{4-2-1}$$

となる．ここに，b は，1 件あたりの年金額，　N は取引時点の被保険者数とする．

同様に，35 歳を起点とする実確率測度 P^l 上の死亡率の累積分布関数を $F_l(k) = {}_k q_{35}^l$ とする．これは，1990-95 SOA Basic Table より求めた．$F_l(k)$ をワン変換によりリスク調整済確率測度 Q^l 上での死亡率の累積分布関数 $F_l^{Q^l}(k)$ に変換すると

$$F_l^{Q^l}(k) = \Phi[\Phi^{-1}(F_l(k)) - \lambda_l]$$

となる．ここに，λ_l は，リスク調整済確率測度への変換パラメーター（死亡リスクの市場

価格）である．λ_l を求めるために，保険市場の 10 年死亡保険の価格 $A_{35:10}$ を用いると，この λ_l は，期間を通じて一定として

$$A_{35:10} = \sum_{k=1}^{10} v^{k+1} ({}_k q_{35}^{Q^l} - {}_{k-1} q_{35}^{Q^l})$$

の等式が成り立つことから定まる．ここで，$A_{35:10}$ は，Best’s Review(1996) で公表された民間生命保険会社の 10 年死亡保険の価格を用いた．

以上の結果，求められた λ_l に基づき死亡保険契約集団の 10 年間のペイオフのリスク調整済確率測度 Q^l 上の期待現在価値 π_L^l は,

$$\pi_L^l = S_F N \sum_{k=1}^{10} v^{k+1} ({}_k q_{35}^{Q^l} - {}_{k-1} q_{35}^{Q^l}) \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

である．ここに，S_F は，1 件あたりの保険金額．

したがって，65 歳加入の即時払終身生命年金契約集団と 35 歳加入の死亡保険契約集団の 10 年間のペイオフを交換するスワップ取引の契約条件は，上記の π_a と π_l の値が等しくなるように F と b の関係を求めることで行われる．この取引モデルは，相互に保険契約集団を交換することにより負債のポートフォリオを改善するタイプのモデルと解釈できる．しかし，交換の対象となる契約集団の年齢層の違いから生じるリスクが課題である．

Lin and Cox[2005a]は，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを保険市場の市場価格を用いて求めたが，資本市場の市場価格より求めたのが Cairns et al[2006]である．

4.2.2 Cairns et al[2006]のモデル

Cairns et al[2006]は，2004 年 11 月に EIB（欧州投資銀行）が発行した長寿リスク債券に内在する無リスク債との金利スプレッドからリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた．つまり，資本市場から生存リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーターを示したものである．EIB の長寿リスク債は，期間 25 年，発行額約 540 百万ポンドで，クーポンは，イングランドとウェールズの 2003 年の 65 歳の生存人口に対し，その後の生存率を反映して決められる．つまり，この長寿リスク債は，クーポンが生存率に比例して減少する債券である．また，この債券の無リスク債との金利スプレッドが，20 ベーシスポイントであることが公表されている．

そこで，Cairns et al[2006]は，EIB が発行した長寿リスク債の無リスク債との金利スプレッドと死亡率の確率過程から，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた．

まず，死亡率の確率過程モデルを特定した．

4.2.2.1 死亡率の確率過程モデル

実確率測度 P 上の死亡率の確率過程は，*Perks* [1932]のモデルを採用している．
$q(t,x)$ は，x 歳の人が t 年後まで生存し，その直後の 1 年間で死亡する確率と定義すると，*Perks* [1932]は，$q(x,t)$ を

$$q(t,x)=\frac{\exp\{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)\}}{1+\exp\{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}$$

と定義した．ここに，$\{A_i(t)\}$ は，

$$A_1(t+1)=A_1(t)+\mu_1+c_1Z(t+1)$$

$$A_{21}(t+1)=A_2(t)+\mu_2+c_2Z(t+1)$$

に従うとした．また，$Z(t+1)$ は，実確率測度のもとでの標準正規分布に従う確率変数，μ と c は，定数とし，イングランドとウェールズの国民生命表により求めた．

4.2.2.2　長寿リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーター

リスク調整済確率測度 Q 上の新たな確率過程を，

$$A_i(t+1)=A_i(t)+\mu_i-c_i\lambda_i+c_i\overline{Z}(t+1)\ \ for\quad i=1,2$$

と仮定する．ここに，λ_i と $\overline{Z}(t+1)$ は，リスク調整済確率測度 Q への変換パラメーターとリスク調整済確率測度 Q のもとでの標準正規分布に従う確率変数である．非完備市場のため，λ_i をＥＩＢの長寿リスク債券の価格より求めることとした．スタートを 65 歳の生存人口とし，期間 25 年とした EIB の長寿リスク債券の価格 $V(0)$ は，公表されている金利スプレッドδから

$$V(0)=\sum_{T=0}^{24}B(0,T)e^{\delta T}E^P[S^C(T)\}$$

により求められる．ここに，$B(0,T)$ は，額面 1 の期間Ｔ年の無リスクゼロクーポン債の 0 時点の価格．$S^C(T)$ は，Ｔ年後のペイオフとする．求められた $V(0)$ を用いて，λ_i を $\lambda_1=\lambda_2$ と

して，

$$V(0)=\sum_{T=0}^{24}B(0,T)E^{Q(\lambda)}[S^C(T)]$$

が成り立つλ_iを期間を通じて一定として求めた．

　今後，日本においても，死亡・生存リスク債が発行され，かつ，活発に資本市場で取引されれば，死亡・生存リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーターを資本市場の市場価格から求めることができることをCairns et al[2006]は示した．

以上の2つの先行研究を参考に次の節以降で，本章の死亡リスク・スワップ取引モデルを提案する．

4.3 死亡リスク・スワップの取引モデル

この節では，死亡リスク･スワップの取引モデルを提案する．具体的には，X社とY社，2社間で内在する死亡リスクと生存リスクを交換する死亡リスク・スワップ取引モデルを提案する．X社とY社の取引対象被保険者集団は，独立とし，ともに取引時点の対象被保険者数を$l_\omega(0)$とした．そのペイオフは，X社の被保険者集団の10年間の死亡数がA^X人を超えると超えた人数に対し，1人当たりHを満期時点でY社からX社に支払う．式で表すと

$$\mathrm{H}\max(\sum_{k=1}^{10}d_\omega^X(k)-A^X,0) \tag{4-3-1}$$

となる．このペイオフは，コールオプションのペイオフと解釈する．

一方，Y社の10年間の死亡数がA^Y人を下回ると下回った人数に対し，1人当たりHを満期時点でX社からY社に支払う．式で表すと

$$\mathrm{H}\max\{A^Y-\sum_{k=1}^{10}d_\omega^Y(k),0\} \tag{4-3-2}$$

となる．このペイオフは，プットオプションのペイオフと解釈する．したがって，この死亡リスク・スワップ取引は，死亡数の上ブレリスクと下ブレリスクをこのペイオフにより相互にヘッジする取引であると解釈した．

ここに，

(1)　ωを取引時の被保険者年齢とし，60歳とする．

(2)　$\{d_\omega^X(t),t\geq 0\}$をX社の被保険者集団に係る経過期間[t-1,t]の死亡数の確率過程とす

る.

(3) $\{d_\omega^Y(t), t \geq 0\}$ をY社の被保険者集団に係る経過期間[t-1, t]の死亡数の確率過程とする.

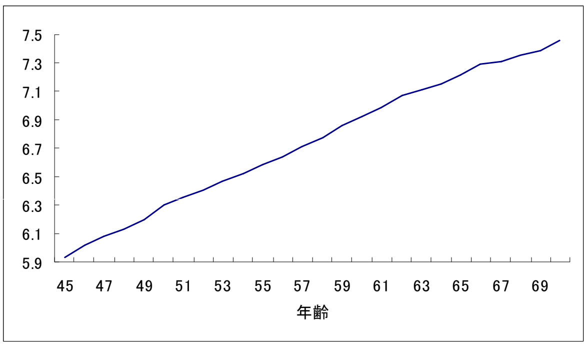
4.4 死亡数の確率過程の特定

死亡リスクと生存リスクは，死亡数の不確実性から生じるリスクである．したがって，この節では，死亡数の確率過程を特定する.

死亡数の確率過程の数式化は,同時出生の25年分の簡易生命表により時系列分析を行い,モデルのパラメーターは，X社とY社のそれぞれの経験値を用いて求めることとした.

4.4.1　死亡数の確率過程の数式化

この節では，時系列分析により,死亡数の確率過程の数式化を行う．時系列分析の標本は，簡易生命表から直近2003年の男子70歳死亡率をもとに同時出生（コーホート）の過去の45歳から70歳の死亡率とした．具体的には，1933年生まれの45歳を時系列分析のスタート時点の年齢(ω)とし,その期首の同時出生生存数に対して,その後の経過t年度(離散時点）の死亡数$D_\omega(t)$を求め，この死亡数$D_\omega(t)$により時系列分析を行った．なお，対数死亡数をグラフで示すと，[図4-1]のとおり線形に近い．もし，線形とみなせれば，対数死亡数の確率過程がランダムウォークになる可能性がある．この点を踏まえて，時系列分析を行った.



[図4-1]1933年生まれ，$\ln D_{45}(t)$

4.4.1.1. モデルの同定

$InD_{\omega}(t)$ を説明するために，自分自身の過去を説明変数とする回帰モデル

$$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + \phi_1 InD_{\omega}(t-1) + \phi_2 InD_{\omega}(t-2)$$
$$+\phi_3 \ln D_{\omega}(t-3) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \phi_f \ln D_{\omega}(t-f) + u_{\omega}(t) \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

を $AR(f)$ と記す．ここで，ϕ_i と μ_{ω} はパラメータである．この次数 f を $SBIC$ によって決める．具体的には，推定式の誤差を表した SBC が最小となる次数を採択するのである．この結果，表 4-1 のとおり $AR(1)$ が最小のため，次数 1 を採択した．

表 4-1. 同定

	μ_{ω}	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$SBIC$
$AR(1)$	0.1636	0.9847			−8.2038
$AR(2)$	0.1622	0.9197	0.0658		−8.0508
$AR(3)$	0.2062	0.9242	−0.1561	0.2128	−7.9219

したがって，モデルは，

$$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + \phi_1 InD_{\omega}(t-1) + u_{\omega}(t) \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

となった．次に，もし，$\phi_1 = 1$ であれば，

$$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + InD_{\omega}(t-1) + u_{\omega}(t) \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

となり，趨勢をもつランダムウォークモデルの可能性がある．したがって，$\phi_1 = 1$ の検定，

すなわち，単位根検定を行う．

4.4.1.2 単位根検定

検定方法は，F 値タイプの検定である．具体的には，

帰無仮説　$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + InD_{\omega}(t-1) + u_{\omega}(t)$

対立仮説　$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + \beta_1^{'} t + \phi_1 InD_{\omega}(t-1) + u_{\omega}(t)$

として，検定を行った結果，表 2 のとおり両側有意水準 5%で帰無仮説は，棄却されなかった．

表 4-2．単位根検定　F 値タイプのテスト

F 値統計量	臨界値 5%水準	臨界値 95%水準
2.67	1.08	7.24

したがって，このモデルは，(4-4-3)式になった．次に，(4-4-3)による推定結果との残差を算出し，このモデルが正しいかどうかの診断を行う．

4.4.1.3 モデルの診断

モデルの診断は，まず，残差系列を求め，その残差系列を用いて，系列的に独立か否かの統計的検定を行うものである．もし，このモデルが正しければ，残差系列は独立のはずである．検定方法は，$Ljung-Box$ 検定である．具体的には，

帰無仮説　ラグ 5 までの残差系列が独立

対立仮説　ラグ 5 までの残差系列のなかで少なくとも 1 つは従属

として，検定を行った結果，表 4-3 のとおり，帰無仮説は，有意水準 5%で棄却されなかった．

表 4-3．残差自己相関の検定

Ljung − Box 統計量	臨界値 5%水準
2.08	11.07

診断の結果，(4-4-3)のモデルを採択した． (4-4-3)は，離散時点の標本から求めたモデルであるが， $D_{\omega}(t)$ を各会計年度における死亡数ではなく連続時間の中のある経過 t 時点での直近過去 1 年間，すなわち経過期間[t-1, t]の死亡数とすることにより，予測死亡数 $D_{\omega}(t)$ の連続時間過程モデルを，幾何ブラウン運動過程

$$D_{\omega}(t) = D_{\omega}(0)\exp(y_{\omega}(t)) \tag{4-4-4}$$

と仮定した．ここで， $y_{\omega}(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(\mu_{\omega}t, \sigma_{\omega}^{2}t)$ に従う． なお， $y_{\omega}(t)$ が，正規分布に従うため，理論的には死亡数の合計がスタート時点の生存数を超える問題が発生する．ただ，今回想定した死亡リスク・スワップは，10 年間に限定しているため，この問題が発生する確率は，小さく無視できる範囲と考える．

4.4.2 死亡数の確率過程のパラメーター $\mu_{\omega},\sigma_{\omega}$ の決定

(4-4-4)式に含まれるパラメーターを求め，死亡数の確率過程を特定した．このパラメーターは，X 社と Y 社それぞれの集団に関する経験値に基づき推測するものとし，表 4-4 のとおりとした．

表 4-4

	μ_{ω}	σ_{ω}
X 社の被保険者集団に係る死亡数の確率過程のパラメーター	μ_{ω}^{X}	σ_{ω}^{X}
Y 社の被保険者集団に係る死亡数の確率過程のパラメーター	μ_{ω}^{Y}	σ_{ω}^{Y}

したがって，実確率測度上での死亡数の確率過程は，それぞれ，

$$d\ln d_\omega^X(t) = \mu_\omega^X dt + \sigma_\omega^X\ dW^X(t) \tag{4-4-5}$$

$$d\ln d_\omega^Y(t) = \mu_\omega^Y dt + \sigma_\omega^Y\ dW^Y(t) \tag{4-4-6}$$

に従う．ここに，$W^X(t), W^Y(t)$ は，相関 ρ_{XY} をもつ標準ブラウン運動に従う．

4.5 死亡リスク・スワップの価格付けモデル

この節では，死亡リスク・スワップ取引の価格付けモデルを導出する．

死亡リスク・スワップ取引の価格付けは，(4-4-5)を原資産とし，(4-3-1)をペイオフとするコールオプションと，(4-4-6)を原資産とし，(4-3-2)をペイオフとするプットオプションのプレミアムが等価となるように契約条件を設定することで行う．

しかし，死亡数自身は，資本市場では取引されていない．死亡リスク・スワップも，資本市場で取引が行われていない．このような場合は，市場は，非完備となり，死亡リスク・スワップのペイオフを原資産と無リスク資産の合成により求めることができない．つまり，無リスクポートフォリオの構築理論に基づかない価格理論を用いる必要がある．

そこで，本研究では，Gerber and Shiu [1994]と 2 節の先行研究を参考に，リスク調整済確率測度変換により，それぞれのオプションプレミアムを求め，死亡リスク・スワップ取引の価格付けである条件設定の方法を示すこととした．

4.5.1 リスク調整済の確率密度関数

まず，Gerber and Shiu[1994]を参考にエッシャー変換によるリスク調整済の確率密度関数を求める．具体的には，(4-4-4)の $y_\omega(t)$ の確率密度関数を $f(y_\omega(t))$ とする．オプションプレミアムを求めるために，エッシャー確率測度変換を行うと，リスク調整済確率測度 Q 上の確率密度関数は，

$$f^Q(y_\omega(t)) = \frac{e^{\alpha y_\omega(t)}}{E[e^{\alpha y_\omega(t)}]} f(y_\omega(t)) \tag{4-5-1}$$

となる．ここに，α はリスク調整済確率測度 Q への変換パラメーター（市場参加者のリスク回避度を反映したもの）となる．$y_\omega(t)$ の積率母関数 $M(z,t)$ は，

$$M(z,t) = \exp(\mu_\omega zt + \frac{1}{2}(\sigma_\omega^2 z^2 t))$$

であるから，新たな確率密度関数の積率母関数 $M(z,t:\alpha)$ は

$$
\begin{aligned}
M(z,t:\alpha) &= \frac{E[e^{\alpha y(t)}e^{zy(t)}]}{E[e^{\alpha y(t)}]} \\
&= \frac{\exp(\mu_\omega t(\alpha+z)+1/2\sigma_\omega^2(\alpha+z)^2 t)}{\exp(\mu_\omega t\alpha+1/2\sigma_\omega^2\alpha^2 t)} \\
&= \exp\{(\mu_\omega+\sigma_\omega^2\alpha)zt+\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 z^2 t\}
\end{aligned}
\tag{4-5-2}
$$

となる．したがって，エッシャー変換によりリスク調整済確率測度 Q^X，Q^Y のもとで，あらたな死亡数の確率過程は，(4-4-5)，(4-4-6)，(4-5-2) より

$$
d\ln d_\omega^X(t) = (\mu_\omega^X + (\sigma_\omega^X)^2\alpha^X)dt + \sigma_\omega^X d\overline{W}^X(t) \tag{4-5-3}
$$

$$
d\ln d_\omega^Y(t) = (\mu_\omega^Y + (\sigma_\omega^Y)^2\alpha^Y)dt + \sigma_\omega^Y d\overline{W}^Y(t) \tag{4-5-4}
$$

と表されることとなる．ここに，$\overline{W}^X(t),\overline{W}^Y(t)$ は，リスク調整済確率測度 Q^X，Q^Y のもとで，相関 ρ_{XY} をもつ標準ブラウン運動に従う．

もし，完備市場取引であれば，マルチンゲール理論に従い，このドリフト項は，α に無関係にリスクフリーレートと σ によって一意に決まるが，非完備市場取引のため，リスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y を求める必要がある．

4.5.2　リスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y

死亡リスク・スワップ取引の市場参加者が生命保険会社であることから，現在の生命保険料を用いれば，リスク調整済確率測度への変換パラメーター α は求まるはずである．つまり，生命保険のペイオフが，死亡数の実現値関数であることから，生命保険を死亡数の派生商品と考える．死亡数と生命保険のペイオフは同じリスク回避度を持つとして，現在の生命保険料からリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y を求めることができる．なお，以下では，簡単化のため，コストは無視した．

具体的には，Lin and Cox[2005a] と Cairns et al[2006] が市場価格によりリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めたのと同様に，定期保険の純保険料から，コールオプションに内在する死亡リスクに対応したリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X を，また，生命年金保険の純保険料から，プットオプションに内在する生存リスクに対応した変換パラメーター α^Y を期間を通じて一定と仮定して求めた．

また，資本市場での生命保険の市場価格は存在しないが，相対取引である死亡リスク・スワップ取引の市場参加者が生命保険会社であるため，定期保険と生命年金保険の純保険料が，生命保険会社の死亡リスクと生存リスクに対するリスク選好を反映した公正価格とみなしたのである．次に，リスク調整済確率測度変換パラメーターを導出する．10 年定期保険の保険金 1 に対する一時払純保険料を $P^T(10)$ とすると，リスク調整済確率測度 Q^X のもとで，(4-5-3) により，

$$P^T(10) = \frac{1}{l_\omega(0)} E^{Q^X}[\sum_{t=1}^{10} d_\omega^X(t) e^{-r(t-0.5)}] \tag{4-5-5}$$

が成り立つはずである．(4-5-5) 式によりリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X が Lin and Cox[2005a] と Cairns et al[2006] と同様に，期間を通じて一定として求まる．なお，r は，連続複利リスクフリーレート $\log(1+予定利率)$ とした．
同様に，10 年有期生命年金保険の即時払年金額 1 に対する一時払純保険料を $P^a(10)$ とすると，リスク調整済確率測度 Q^Y のもとで，(4-5-4) により，

$$\begin{aligned} P^a(10) &= E^{Q^Y}[\frac{1}{l_\omega\ (0)}\{l_\omega(0) + (l_\omega(0) - d_\omega^Y(1))e^{-r}) \\ &\quad + (l_\omega(0) - \sum_{k=1}^{2} d_\omega^Y(k))e^{-r2}) + ,\quad , \\ &\quad + (l_\omega(0) - \sum_{k=1}^{9} d_\omega^Y(k))e^{-r9})\}] \\ &= E^{Q^Y}[1 + \sum_{t=1}^{9}(1 - \frac{1}{l_\omega\ (0)} \sum_{k=1}^{t} d_\omega^Y(k))e^{-rt}] \end{aligned} \tag{4-5-6}$$

が成り立つはずである．つまり，$P^a(10)$ は，毎期始に生存率に年金額 1 を乗じた額が支払われ，その毎期の支払額の期待現在価値と等価となるはずである．(4-5-6) 式によりリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^Y が期間を通じて一定として求まる．

4.5.3 オプションの価格モデル

この節では，死亡数のリスク調整済確率測度のもとでの確率過程によりオプション価格モデルを求めた．
コールオプション価格 $Call_X$ は，

$$Call_X = e^{-10r} E^{Q^X}[\mathrm{H}\max(\sum_{k=1}^{10} d_\omega^X(k) - A^X, 0)] \tag{4-5-7}$$

となる．プットオプション価格 Put_Y は

$$Put_Y = e^{-10r} E^{Q^Y}[\mathrm{H}\max\{A^Y - \sum_{k=1}^{10} d_\omega^Y(k), 0\}] \tag{4-5-8}$$

となる．

なお, 死亡数が対数正規分布に従うがその和は, 対数正規分布に従わない. したがって, 死亡数の和の関数とするオプションプレミアムを求める方法は, 解析解によることができない. よく知られているアジアンオプションプレミアムの近似式による方法や共単調性による多変量リスクの評価法による上限下限を求める方法などによりオプションプレミアムを求めることが考えられるが，本論文では，モンテカルロ・シミュレーション法によることとし，6 節にて，数値例を示した．なお, アジアンオプションプレミアムの近似式については, 山下[2001]を参照されたい. また, 共単調性による多変量リスクの評価法については, 小暮[2005]を参照されたい.

4.5.4 死亡リスク・スワップ取引の価格付け

死亡リスク・スワップの価格付けは，A^X を所与としたときに前節の $Call_X$ と Put_Y が等価となるように， A^Y を設定することで行われる．次節では，実際に数値例を示す．

4.6. 試算

この節では，死亡リスク・スワップに関する価格付けの数値例を示す．

4.6.1 オプション価格

以下の計算前提をもとに前説で求めたコールオプションとプットオプションの価格を試算する．

計算の前提は，以下のとおりとする．

(1) 取引時の被保険者の年齢は，60 歳（男子）．
(2) スワップの取引期間は， 10 年．

(3) 割引率は， $r = \log(1+0.015)$.

(4) $l_{\omega}(0)$ は，100,000.

(5) $d_{\omega}^{X}(t)$ は，X 社の被保険者集団の死亡数の確率過程. この確率過程のパラメーターは，生保標準生命表 1996 の男子粗死亡率より求めた.

(6) $d_{\omega}^{Y}(t)$ は，Y 社の被保険者集団の死亡数の確率過程. この確率過程のパラメーターは，簡易生命表男子死亡率(2003 年時点で 69 歳の死亡率を基準に過去 10 年間の同時出生死亡率) の 90%より求めた.

(7) H は，100 万円とする.

(8) コールオプションの権利行使価格 A^X は，

$$A^X = E^{Q^X}[\sum_{t=1}^{10} d_{60}^{X}(t)]$$

とする.

(9) 予定死亡率は，下表 4-5 のとおりとし，予定利率は，1.5%と仮定した.

表 4-5

	定期保険	有期生命年金保険
予定死亡率	生保標準生命表 1996	生保標準生命表 1996（年金開始用）

上記計算前提のもとに，試算した結果は，表 4-6，表 4-7 のとおりとなった.

表 4-6

$P^T(10)$	$d_{60}^{X}(0)$	$\mu_{60}^{X} + (\sigma_{60}^{X})^2 \alpha^X$	σ	A^X	$Call_X$（単位百万円）
0.13322	890	0.08387	0.01478	14,540	159

表 4-7

$P^a(10)$	$d_{60}^{Y}(0)$	$\mu_{60}^{Y} + (\sigma_{60}^{Y})^2 \alpha^Y$	σ
9.02165	757	0.03368	0.01843

なお，ρ_{XY} は，0.5 と仮定した．また，モンテカルロ・シミュレーション法は，シミュレーション回数を 10,000 回として求めた．

4.6.2 スワップ取引の価格付け

スワップ取引の価格付けは，A^X を所与として，ゼロコスト・カラー取引であるコールオプションとプットオプションのプレミアムが一致するように，契約条件の中の A^Y を設定することで行われる．したがって，A^X が 14,540 であったことから，(4-5-8)式より $Call_X = Put_Y$ =159 百万円となるように，A^Y を求めると $A^Y = 9{,}244$ となる．その結果，死亡リスク・スワップ取引の契約条件は，下表 4-8 のとおりとなった．

表 4-8　権利行使価格

A^X	A^Y
14,540	9,244

つまり，X 社の対象契約集団の 10 年間の合計死亡数が 14,540 人を超えれば，超過 1 人当たり 100 万円を取引満了時点で X 社が Y 社から得る．一方，Y 社の対象契約集団の 10 年間の死亡数が 9,244 人を下回れば，下回った人数に対し，1 人当たり 100 万円を Y 社は，X 社から得る取引モデルである．

4.7 結論

本章は，生命保険のリスク管理手段の 1 つとして期待できる死亡リスク・スワップ取引を考察した．これは，2001 年 6 月に東京ガスと東京電力が行った天候デリバティブを交換する気温リスク・スワップ取引を参考にしたものである．

死亡リスク・スワップ取引は，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社（X 社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社（Y 社）との間で，保険加入ニーズの違いから異質集団に内在する死亡リスクと生存リスクを交換する取引である．死亡リスク・スワップ取引の交換するペイオフは，コールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，価格付けは，コールオプションとプットオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行った．そのオプション価格は，非完備市場取引であるので，マルチンゲール理論に従わず，死亡数の派生商品である死亡保険と生命年金保険の純保険料から，リスク調整済の確率過程へエッシャー変換することで求めた．また，最後に，モンテカルロ・シミュレーション法により死亡リスク・スワップ取引の価格付けの数値例を示した．

今後は，価格競争がさらに進むことにより，生命保険会社の死亡リスクと生存リスクの

リスク選好も変化するものと思われる．この結果，現在より，少なくとも生命保険会社が抱える死亡リスクおよび生存リスクが高まることが予想される．この点で，死亡リスク・スワップ取引は，生命保険会社のリスク管理上，有効な手段となることが期待できる

第5章　今後の課題

死亡リスクのプライシングの手法は，未だ発展途上にあるといえる．それは，死亡リスクのデリバテイブが生命保険と金融という複合的な領域での新たな産物であり，その市場が完全に形成されていないことが要因と考えられる．

今後，生命保険リスクの証券化と死亡リスク・スワップ取引を通じて新たなプレイヤーの参加が増大し，死亡リスクというものに対する考え方がさらに一般的になることによって，死亡リスクのデリバテイブ市場がより成熟されたものになるであろう．それにより，死亡リスクに関するデリバテイブのプライシング理論がさらに洗練されることが市場より要求される．この流れの中で，本論文でのモデルを見直し，より市場に適合したものに改善することを今後の課題としたい．

参考文献：

[1]Alaton.P,Djehiche.B and Stillberger.D[2002] “On Modelling and Pricing Weather Derivatives, ” Working Paper (http://www.math.kth.se/matstat/fofu/reports/weather.pdf)

[2]Bauer.D [2006],“Pricing Longevity Bonds using Implied Survival Probabilities”,Working Paper (http://www.aria.org/meetings/2006papers/BauerRuss_ImpliedSurv.pdf)

[3]Blake,Andew Cairn,Kevin Dowd,Richard MacMinn[2006],“Longevity Bonds:Financial Engineering,Valuation,And Hedging,”,The Journal of Risk and Insurance, Vol 73,No4,647-672

[4] Black,F. and Scholes,M.[1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Jornal of Political Economy,81,637-654

[5]BNP PARIBAS[2005], “The Longevity Bond”, First International Coference on Longevity Risk and Capital Markets Solutions 18th February 2005

[6]Buhlmann,H[1970], “Mathematical Methods in Risk Theory.” Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[7]Buhlmann,H[1980],“An Economic Premium Principle.” ASTIN Bulletin, 1980,11:52-60

[8]Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K. [2006] “A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty”, Journal of Risk and Insurance Vol.73(4),687-718.

[9]Cao,M. and J.Wei[2000], “Equilibrium Valuation of Weather Derivatives”,working Paper,University of Toronto (http://www.rotman.utoronto.ca/~wei/reserch/hddcdd.pds,2004/09/16)

[10]Chrupat ,N and Milevsky,M.A,“Mortality Swap and Tax Arbitrage in the Canadian Insurance and Annuity Markets ”,The Journal of Risk and Insurance,Vol.68,No.2.(Jun.,2001),277-302

[11]Cummins.J.D.[2004],“Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities”,TIAA-CRAF Institute The Wharton School

[12]Davis,M.[1998], “Option Pricing in incomplete markets”,Mathematics of Derivative Securities, eds.M.A.H.Dempster and S.R.Pliska,Cambridge University Press,216-226

[13]Davis,M.[2000], “ Pricing Weather Derivatives by marginal value”,Quantitative Finance,1,305-308

[14] Davis,M.[2005], “ Insurance Risk and Ruin”,Cambridge University Press

[15]Dhaene,Denuit,Goovaets Kaas and Vynke[2002a]. “The concept of comonotonicity

in actuarial science and finance: Theory," Insurance:Mathematics and Economics,Vol.31,pp3-33.

[16]Dhaene,Denuit,Goovaets Kaas and Vynke[2002b]. "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance:Applications," Insurance:Mathematics and Economics,Vol.31,pp133-161.

[17]Essher,F.[1993], "On the Probability Function in the Collective Theory of Risk".Sknad.Aktuar.Tidskr,15,175-195

[18]Friedberg.L and Webb.A[2005] "Life is Cheap:Using Mortality Bonds to Hedge Aggregate Mortality Risk, " *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy*: Vol. 7 : Iss. 1 (Topics), Article 31.
(http://www.bepress.com/bejeap/vol7/iss1/art31/)

[19]Gaurilov,L.A.and Gavriova, N. [2001], "The Reliability theory of Aging and Longevity", J. theor. Biol. 213, 527-545 Academic Press

[20]Gerber,H.U.and Shiu,E.S.W. [1994], "Option Pricing By Esscher Transforms", Transactions of the Society of Actuaries 66 99-140

[21]Gerber,H.U.and Shiu,E.S.W. [2003],"Pricing Lookback Options and Dynamic Guarantees", North American Actuarial Journal,Volume 7,Number 1 48-67

[22]Goovaerts.M.J and Vylder.F and Haezendonck.J,[1984],"Insurance Premiums,Theory and Applications",North-Holland,Amsterdam

[23]Hsien-Hsing Liao,Sharon S.Yang,I-hsing Huang[2007],"The Design of Securitization for Longevity Risk:Pricing Under Stochastic Mortality Model with Tranche Technique, ",Paper Presented to 2007 APRIA Conference in Taipei

[24]Jewson.S,Zwrvos.M[2005],"No-Arbitrage Pricing of Weather Derivatives in the Presence of a Liquid Swap Market, "
Working Paper
(http://www.mth.kcl.ac.uk/research/finmath/articles/jewson-zervos.pdf)

[25]Kevin Dowd,David Blake,Andrew J.G.Cairns,Paul Dawson[2006], "Survivor Swaps, ", The Journal of Risk and Insurance, Vol 73,No1,1-17

[26]Lee, R. D and Carter, L. R. [1992],"Modeling and Forecasting U. S. Mortality", Journal of the American Statistical Association, Vol. 87, No. 419, 659-671

[27] Lin,Y., and Cox,S.H.[2005a],"Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks, "Working paper, Georgia State University

[28] Lin,Y., and Cox,S.H.[2005b] , "Securitization of Mortality risks in life annuities, " Journal of Risk and Insurance 72(2),227-252

[29]Michel Denuit,Pierre Devolder,Anne-cecile Goderiaux[2007],"Securitization of Longevity Risk:Pricing Servivor Bonds With Wang Transform in the Lee-Carter

Framework, ". The Journal of Risk and Insurance, Vol 74,No1,87-113
[30]Milevsky.M.A, and Promislow, S.D. [2001], "Mortality derivatives and the option to annuitise", Insurance; Mathematics and Economics 29 299-318
[31]Neftci,S.N. [1996], "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives ", ACADEMIC PRESS
[32]Nraoua.M,Bari.D[2005] "Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing:empirical study with Moroccan data", Working Paper (http://www.univ-rouen.fr/LMRS/JSEF06/JSEF1_fichiers/mraoua.pdf)
[33]Perks,W.(1932), "On some experiments in the graduation of mortality statistics,"Journal of the Insutitute of Actuaries 63,12-57
[34]Platen,E and J,West[2003], "Fair Pricing of Weather Derivatives," Research Paper Series 106,Quantitative Finance Reserch Centre ,University of Technology,Sydney.
[35]Richards.T,Manfredo.R.M,Sanders.R.D,"Pricing Weather Derivatives for Agricultural Risk Management", Proceedings of the NCR-134 Conference on Applied Commodity Price Analysis,
Working Paper
(http://www.farmdoc.uiuc.edu/nccc134/conf_2003/pdf/confp09-03.pdf)
[36]Swiss Re[2006],"Securitization-new opportunities for insurers and investors" Sigma No7/2006
[37]Thomas Moller[2001],"On Transformation of Actuarial Valuation Principles",Insurance:Mathematics and Economics Vol 28 281-303
[38]Wang,S.S. [1995] "Insurance Pricing and increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms", Insurance:Mathematics and Economics, 17, 43-54
[39]Wang, S. S. [2000] "A class of distortion operations for pricing financial and insurance risks, "Journal of Risk and Insurance 67(1), 15-36
[40]West.J[2002] "Benchmark Pricing of Weather Derivatives, " Working Paper (http://www.qfrc.uts.edu.au/conferences/qmf2002/West_J.pdf)
[41]池田昌幸 [2000], 『金融経済学の基礎』, 朝倉書店
[42]刈屋武昭, Tee Kian Heng,郷古浩道[2004],「ARCH 型分散変動モデルによる気温リスク・スワップの検証」Discussion Paper No.0401 京都大学経済研究所金融工学センター
[43]木島正明・田中敬一 [2007], 『資産の価格付けと測度変換』, 朝倉書店
[44]小暮厚之 [2000], 『ファイナンスへの計量分析』, 朝倉書店
[45]小暮厚之[2005], 「共単調性による多変量保険リスクの評価」,日本保険・年金リスク学

会,『リスクと保険』Vol.1 P7-20
[46]小島茂[2005],「生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け」,日本保険・年金　リスク学会,『リスクと保険』Vol.1 P41-52
[47]小島茂[2005],「生命保険における生存リスクの証券化とその価格付け」慶応義塾大学２１世紀 COE　保険とリスク　　P331-346, 朝倉書店
[48]小島茂 [2007],「生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル」,日本保険・年金リスク学会,「ジャリップジャーナル」Vo2.2 P1-17
[49](社) 日本アクチユアリー会[1996] ,『生保標準生命表 1996 の作成過程』
[50] (社) 日本アクチユアリー会[2000] ,『損保数理』
[51]名取和洋[2005],「複合ポアソン過程を用いた降水量デリバティブの価格付け」, Working Paper,(http://www.ohno.mgmt.waseda.ac.jp/Thesis/04natori.pdf)
[52]西田真二[2004],「気温リスク・スワップ・ペイオフ関数の合理的決定法」, 日本統計学会誌　第 34 巻, 第 1 号, P73-82
[53]藤田岳彦[2002], 『ファイナンスの確率解析入門』, 講談社.
[54]蓑谷千凰彦[2001], 『金融データの統計分析』, 東洋経済新報社.
[55]森本裕司[2000],「金融と保険の融合について」,『アクチユアリージャーナル』,40,P24-75
[56]山下司[2001],『オプションプライシングの数理』, 金融財政事情研究会
[57]山田雄二[2005],「取引ボリュームを考慮した天候デリバティブの均衡価格とヘッジ効果の測定」, 日本金融・証券計量・工学学会　冬季大会予稿集 113-131
[58]山本拓[1999], 『経済の時系列分析』, 創文社

標記一覧

$\overline{A}$　：投資額
A_K　：エクセスポイント（権利行使価格）
A_{K1}　：エクセスポイント（権利行使価格）
A_{K2}　：エクセスポイント（権利行使価格）
A^X　：エクセスポイント（X 社の権利行使価格）
A^Y　：エクセスポイント（Y 社の権利行使価格）
A_α　：エクセスポイント（カバーの下限）
A_β　：エクセスポイント（カバーの上限）
$A_i(t)$　:Perks の死亡率確率過程
$A_{x:n}$　：x 歳加入 n 年満期の定期保険保険金 1 の一時払純保険料
$\overline{B}$　:償還額
$B(t)$　:残存 t 年の無リスクゼロクーポン債券の現在価格
$B(1)$　:1 年後の債券価格
$B(t,T)$　:残存 T−t 年の無リスクゼロクーポン債券の t 時点での価格
C　:定数項
C_i　:定数項
$C(t)$　:ヨーロピアンコールオプションプレミアム
$C_i(t)$　:1 年後の状態 i のヨーロピアンコールオプションプレミアム
$Call$　:コールオプションプレミアム
$Call_X$　:X 社のコールオプションプレミアム
D_1　:1 年後のポートフォリオ
$D_w(t)$　：w 歳の経過[t-1, t]の間の死亡数
E^P　:実確率測度 P に基づく期待値
E^Q　:リスク調整済確率測度 Q に基づく期待値
F_a^Q　:リスク調整済確率測度 Q に基づく累積分布関数
F_a　:実確率測度 P に基づく累積分布関数
F_t　:フィルトレーション
G　:死亡数の観察期間の中の最大値
H　:一人当たりの保険金
$H(t)$　:t 時点の原資産価値
K　:オプションの権利行使価格
$M(z,t)$　:積率（モーメント）母関数
$M(z,t\,|\,\alpha)$　:積率（モーメント）母関数
$M_{X_1}(\theta)$　:積率（モーメント）母関数

N　：人数

P　：実確率測度

P_1　：状態 1 が起こる実確率

P_2　：状態 2 が起こる実確率

P^t　：ｔ年定期保険の保険料

P_2^t　：期間[t-1, t]の定期保険の保険料

P_t^k　：収入保険料

P^T　：定期保険料

P^a　：有期生命年金保険料

Put　：プットオプションプレミアム

Put_Y　：Y 社のプットオプションプレミアム

PU　：A_α 対応のプットオプションプレミアムの上限値

PL　：A_β 対応のプットオプションプレミアムの下限値

O_t　：期間 t 年の再保険金

$O_w(n)$　：n 年満期の生存保険料

Q　：リスク調整済確率測度

Q_1　：状態 1 が起こるリスク調整済確率

Q_2　：状態 2 が起こるリスク調整済確率

Q^l　：米国の定期保険料に基づくリスク調整済確率測度

Q^a　：米国の生命年金保険料に基づくリスク調整済確率測度

Q^X　：X 社の定期保険料に基づくリスク調整済確率測度

Q^Y　：Y 社の生命年金保険料に基づくリスク調整済確率測度

R_S　：リスク原資産のリスクプレミアム

R_C　：リスク原資産の派生商品のリスクプレミアム

S_t^k　：サープラス過程でのｔ時点の支払保険金

$\overline{S}_t$　：ｔ時点のポートフォリオ

S_2　：再保険金

$\{S_t\}$　：ｔ時点までの保険金支払総額過程

$S(t)$　：リスク原資産の確率過程（ｔ時点の価格）

$S_i(t)$　：1 年後の状態ｉでの株価

$S^C(t)$　：t 時点のペイオフ

S^S　：原資産の相対価格（割引率を考慮した価格）

S_{1j}　：投資家ｊのリスク交換量

S_F　：1 契約あたりの保険金

SP　：ストップロス再保険の保険料

T :満了期間

U :効用関数

U_t :債券のクーポン

U_t^I :サープラスの確率過程（t 時点のサープラス）

$V(0)$:EIB による長寿リスク債券の価格

W_t :t 時点のエクセスポイント

X :1 契約あたりの保険金

X_1 :1 年後の支払保険金

X_{1j} :投資家 j のリスク

Y_t :確率変数

$Y(t)$:死亡数確率過程の確率変数

Z :投資家全体のリスク

Z_t :ブラウン・ゴンパーツメーカム過程モデルの確率変数

$Z(t)$:実確率測度に基づく死亡数の確率過程

$\overline{Z}(t)$:リスク調整済確率測度に基づく死亡数の確率過程

a :定数項

a_ω :年齢のパラメーター

$\ddot{a}_{\omega:n}$:生命年金現価

b :定数項

b_ω :年齢のパラメーター

c :定数項

c_1 : イングランド，ウェールズの国民生命表より求めたパラーメーター1

c_2 : イングランド，ウェールズの国民生命表より求めたパラーメーター2

d :定数項

d_1 :ブラックショールズ公式の変数項

d_2 :ブラックショールズ公式の変数項

$d_w(t)$:死亡数の確率過程（[t-1, t]間の死亡数）

$d_w^X(t)$:X 社の死亡数の確率過程（[t-1, t]間の死亡数）

$d_w^Y(t)$:Y 社の死亡数の確率過程（[t-1, t]間の死亡数）

dW^X :X 社の契約ブロックの死亡数の確率過程におけるウイナー過程

dW^Y :Y 社の契約ブロックの死亡数の確率過程におけるウイナー過程

$e(t)$:時系列分析の誤差項

f :実確率測度に基づく確率密度関数

f^P :実確率測度に基づく確率密度関数

f^Q :リスク調整済確率測度に基づく確率密度関数

g : 定数項

$\hbar$ ：リスクマージン

$h(t)$ ：死力過程

h_u ：死力過程

k ：定数項

k_t ：死亡率の変化指数

k_τ ：ARIMA モデルによる確率過程

l_x ：x 歳始の生存数

$l_x(t)$ ：x 歳の人の経過 t 時点での生存数

$m_{\omega,t}$ ：ω 歳の人の経過 t 時点の死力

n ：満期期間

n^B ：投資家の人数

p ：実確率測度に基づく生存率

$p_t(T)$ ：ｔ時点の生存者がＴ時点まで生存する確率

p^Q ：リスク調整済確率測度に基づく生存率

${}_k p_{65}^{Q^a}$ ：65 歳の経過 k 年時点の生存率

$q(t,x)$ ：実確率測度に基づく死亡率

q^{Q^a} ：生存リスク調整済確率測度に基づく死亡率

q^{Q^d} ：死亡リスク調整済確率測度に基づく死亡率

${}_k q_x^{a^a}$ ：実確率測度のもとでの，x 歳の経過 k 年時点の死亡率

r ：無リスク金利

r_u ：期間 u の無リスク金利

t ：経過期間

$u(t)$ ：残差項

u_j ：投資家 j の効用関数

v ：割引率

ω ：年齢

x ：無リスク資産量

y ：株式量

$y_w(t)$ ：死亡数の確率過程

z ：モーメント母関数のパラメーター

α^X ：X 社の絶対リスク回避度

α^Y :Y 社の絶対リスク回避度
$\beta_1^{'}$ ：単位根検定の定数項
γ :期待値原理における安全付加保険料率
δ :長寿債券の無リスク金利とのスプレッド
ε :残差
ε^I ：破産確率
ψ_i ：状態価格
η :定数
λ_l :死亡リスクに対するリスクの市場価格
λ_a :生存リスクに対するリスクの市場価格
λ_i :リスク調整済確率測度 Q への変換パラメーター
μ :エッシャー原理のなかの平均値パラメーター
μ_1 :イングランド，ウェールズの国民生命表より求めたパラーメーター3
μ_2 ： イングランド，ウェールズの国民生命表より求めたパラーメーター4
μ^I :ルベックモデルの 1 期間あたりの期待値
μ^Q :リスク調整済確率測度のもとでのドリフト項
μ_ω ：ω 歳時点 1 年間の死亡数モデルのドリフト項 1
μ'_ω ：ω 歳時点 1 年間の死亡数モデルのドリフト項 2
μ_ω^X :X 社の契約集団に関する ω 歳時点 1 年間の死亡数モデルのドリフト項
μ_ω^Y :Y 社の契約集団に関する ω 歳時点 1 年間の死亡数モデルのドリフト項
μ_ω ：ω 歳時点 1 年間の死亡数モデルのドリフト項
π :均衡価格
π_2 :ストップロス再保険料
π_L^a :米国の生命保険会社の生命年金保険料
π_L^l :米国の生命保険会社の定期保険料
π_ω^U :ストップロスク再保険料の上限値
π_ω^L :ストップロスク再保険料の下限値
$\pi_\omega(n)$ ：ω 歳契約保険期間 n 年のストップロス再保険料
φ :安全付加保険料率
θ :絶対リスク回避度
σ^2 :分散値パラメーター1
σ_w^2 :分散値パラメーター2
σ'^2_w ：分散値パラメーター3
$\rho_{X,Y}$:X 社と Y 社の死亡数分布の相関係数

Φ :標準正規分布の分布関数

χ :株式のヨーロピアンコールオプションのペイオフ

Θ_j :投資家ｊの初期富

ϕ_i :死亡数の時系列分析パラメーター